L3 – Examen d'Algèbre – Mai 2007

Qu 1. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de V admettant λ comme valeur propre. Donner la définition du sous-espace caractéristique associé à λ et montrer qu'il est f-stable.

Qu 2. Soit V un espace vectoriel hermitien et $f \in \mathrm{End(V)}$.

1) Donner la défintion de l'adjoint f^*, de f.
2) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de V. Comment sont liées les matrices de f et f^* dans $\mathcal{B}$?
3) Préciser la relation entre les sous-espaces f-stables et f^*-stables. Démonstration.

Ex 1. Soit a un nombre réel et q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(v) = x^2 + (1+a)y^2 - (1-a+a^2)z^2 + 2xy - 2ayz$$

où $v = (x, y, z)$

1) Suivant les valeurs de a déterminer le rang, la signature et le noyau de q.
2) Dans le cas où le rang est 2, déterminer le cône isotrope et une base q-orthogonale.

Ex 2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, on considère l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & -4 \\ -4 & 5 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 5 & 2 \\ -4 & -2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Sans calculs, expliquer pourquoi f est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
2) Montrer que f est orthogonal. En déduire que les seules valeurs propres possibles de f sont 1 et -1.
3) Sans calculer le polynôme caractéristique de f, déduire des questions précédentes, le polynôme minimal de f.
4) Déterminer à l'aide de la trace de A, le polynôme caractéristique de f.
5) Déterminer les sous-espaces propres de f. Montrer qu'ils sont orthogonaux.
6) Donner une base orthonormée dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Ex 3. Soient $n \geq 2$ un entier, $A \in M_n(\mathbb{C})$, et $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 0$.

1) Montrer que toute matrice nilpotente admet une réduite de Jordan.
2) Montrer que si A est nilpotente, alors A et λA sont semblables. (*traiter d'abord le cas où A n'a qu'un bloc de Jordan*)
3) On suppose que λ n'est pas une racine de l'unité et que A et λA sont semblables. Prouver que A est nilpotente.