L3 – Partiel d'Algèbre – Mars 2006

Question 1 Donner la définition du polynôme minimal d'un endomorphisme $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Question 2 Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathrm{K}}(\mathrm{V})$ et λ une valeur propre de f. Donner la définition du sous-espace caractéristique de f de valeur propre λ et montrer qu'il est f-stable et qu'il contient l'espace propre de f de valeur propre λ.

Exercice 1 Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, l'endomorphisme :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, -x_1 - 2x_2, -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$$

Montrer que $\mathbb{R}^4$ est la somme directe de deux sous-espaces f-stables. Trouver une base de ces espaces (indication : Question 2).

Exercice 2 Considérer la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$$

a) Déterminer son polynôme caractéristique et son polynôme minimal. Déterminer tous les inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[A]$.
b) Déterminer la forme réduite de Jordan J_A de A. Donner une base de Jordan.
c) Déterminer tous les sous-espaces A-stables.

Exercice 3
a) Montrer que si un endomorphisme f est diagonalisable, alors un quelconque polynôme $Q(f) = a_k f^k + \cdots a_1 f + a_0 I$, en f est diagonalisable aussi.
b) Soit $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^{\mathrm{n}})$ défini comme :

$$f(e_i) := \begin{cases} e_{i+1} & \text{if } \; i = 1, \ldots, n-1 \\ e_1 & \text{if } \; i = n \end{cases}$$

Montrer que $f^n(e_i) = e_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et en déduire que f est diagonalisable.
c) **Application :** Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.