Examen d'Algèbre (Juin 2006) **durée : 2h**

Question I Donner la définition d'un bloc de Jordan et énoncer le théorème de Jordan.

Question II a) Introduire la notion d'un espace vectoriel hermitien, d'un endomorphisme auto-adjoint et d'un endomorphisme normal.

b) On considère $\mathbb{C}^3$ muni de la structure hermitienne standarde. Est-ce que l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est auto-adjoint ? Est-ce qu'il est normal ? Pourquoi ?

Question III Soit V un espace vectoriel hermitien et f un endomorphisme normal de V.
a) Montrer que si un endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormale de V alors il est normal.

b) Soit v un vecteur propre de f de valeur propre λ. Montrer que $f - \lambda I$ est normal et que $f^*(v) = \overline{\lambda} v$.

c) Soit E_λ le sous-espace propre de f de valeur propre λ. Montrer que $E_\lambda^\perp$ est f-stable. En déduire que f est diagonalisable dans une base orthonormale de V.

Exercice I On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Selon les valeurs de α répondre aux questions suivantes :
a) Déterminer le polynôme caractéristique, $\chi_A(x)$, de A et ses valeurs propres.
b) Déterminer la dimension des sous-espaces caractéristiques.
c) Déterminer la dimension des sous-espaces propres.
d) Déterminer le polynôme minimal de $\mu_A(x)$ de A.
e) Déterminer la forme de Jordan J_A de A et une base de Jordan.

Exercice II On considère la forme quadratique réelle $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$.

a) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée et la matrice de q dans la base canonique.

b) Déterminer le rang, la signature, le noyau et le cône isotrope de q. Trouver aussi une base q-orthogonale.

c) Soit $ax + by + z = 0$ un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ avec a et b des paramètres réels. Déterminer les conditions sur a et b pour que la restriction de q a cet hyperplan soit définie positive.

Exercice III Soit V un espace vectoriel hermitien. On appelle une projection un endomorphisme $p : V \to V$ tel que $p^2 = p$.

a) Expliquer pourquoi p est diagonalisable. Préciser les valeurs propres et les sous-espace propres. Que peut-on dire sur la trace de p.

b) Montrer que p est auto-adjoint si et seulement si p commute avec son adjoint.

Examen d'Algèbre (Juin 2006) **durée : 2h**

Question I Donner la définition d'un bloc de Jordan et énoncer le théorème de Jordan.

Question II a) Introduire la notion d'un espace vectoriel hermitien, d'un endomorphisme auto-adjoint et d'un endomorphisme normal.

b) On considère $\mathbb{C}^3$ muni de la structure hermitienne standarde. Est-ce que l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ est

$$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

est auto-adjoint ? Est-ce qu'il est normal ? Pourquoi ?

Question III Soit V un espace vectoriel hermitien et f un endomorphisme normal de V.
a) Montrer que si un endomorphisme est diagonalisable dans une base orthonormale de V alors il est normal.

b) Soit v un vecteur propre de f de valeur propre λ. Montrer que $f - \lambda I$ est normal et que $f^*(v) = \overline{\lambda} v$.

c) Soit E_λ le sous-espace propre de f de valeur propre λ. Montrer que $E_\lambda^\perp$ est f-stable. En déduire que f est diagonalisable dans une base orthonormale de V.

Exercice I On considère la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Selon les valeurs de α répondre aux questions suivantes :
a) Déterminer le polynôme caractéristique, $\chi_A(x)$, de A et ses valeurs propres.
b) Déterminer la dimension des sous-espaces caractéristiques.
c) Déterminer la dimension des sous-espaces propres.
d) Déterminer le polynôme minimal de $\mu_A(x)$ de A.
e) Déterminer la forme de Jordan J_A de A et une base de Jordan.

Exercice II On considère la forme quadratique réelle $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz - 6yz$.

a) Déterminer la forme bilinéaire symétrique associée et la matrice de q dans la base canonique.

b) Déterminer le rang, la signature, le noyau et le cône isotrope de q. Trouver aussi une base q-orthogonale.

c) Soit $ax + by + z = 0$ un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ avec a et b des paramètres réels. Déterminer les conditions sur a et b pour que la restriction de q a cet hyperplan soit définie positive.

Exercice III Soit V un espace vectoriel hermitien. On appelle une projection un endomorphisme $p : V \to V$ tel que $p^2 = p$.

a) Expliquer pourquoi p est diagonalisable. Préciser les valeurs propres et les sous-espace propres. Que peut-on dire sur la trace de p.

b) Montrer que p est auto-adjoint si et seulement si p commute avec son adjoint.