Partiel Algèbre (2005/2006, semestre 2)

Question I Soit V un espace vectoriel hermitien.

Donner la définition d'un endomorphisme auto-adjoint, f, de V. Que peut-on dire des valeurs propres de f. Pourquoi ?

Donner la définition d'un endomorphisme unitaire g, de V. Que peut-on dire des valeurs propres de g. Pourquoi ?

Exercice I Soit $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $q(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + 2xy + 2xz + 2xt + 2yz + 2yt + 4zt$.
(a) Donner la forme bilinéaire associée ainsi que la matrice de q dans la base canonique.
(b) Déterminer la signature, le rang, le noyau et le cône isotrope.
(c) Déterminer une base orthogonale pour q.
(d) Donner la définition d'un sous-espace isotrope. Soit $W \subset \mathbb{R}^4$ le sous-espace défini par

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ x + y = 0 \end{array} \right\}$$

Est-ce que W est un sous espace isotrope ? Déterminer $W^{\perp}$.

Exercice II Soit $A \in M_n(K)$, et p le polynôme $p(X) = X^2 + 2X + 2$.
(a) Supposons $\mu_A(X) = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)^{r_i}$ le polynôme minimal de $A \in M_n(K)$. Que pourrons-nous dire du polynôme caractéristique .
(b) Montrer qu'il n'existe aucune matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $\mu_A(X) = p(X)$.
(c) Dans chaque cas suivant donner un exemple d'une matrice A telle que $\mu_A(X) = p(X)$:

$$A \in M_3(\mathbb{C}),\ A \in M_2(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}),\ A \in M_2(\mathbb{R}).$$

Exercice III Soient V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel hermitien muni de la forme hermitiènne $\langle\ ,\ \rangle$ et $y_0 \in V$ un vecteur de longueur 1.

(a) On définit l'application linéaire $T : V \to V$ comme $T(x) = x - 2\langle y_0, x\rangle y_0$. Montrer que T est un endomorphisme auto-adjoint et unitaire. En déduire les valeurs propres, les sous-espace propres et leurs dimensions. (*Utiliser Question 1)*

(b) Déterminr la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{C}^3$ lorsque $y_0 = (1,0,0)$. En déduire une interprétation géométrique.

(c) soit $\omega \in \mathbb{C}$ un nombre complexe de module 1. On définit l'application linéaire $A : V \to V$ comme $A(x) = x - (1-\omega)\langle y_0, x\rangle y_0$. Montrer que A est un unitaire. Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espace propres et leurs dimensions.

Exercice IV On considère $\mathbb{R}^3$ muni de la forme euclidiènne usuelle. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Expliquer pourquoi u est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Trouver cette base.

Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $q(x) = \langle u(x), x \rangle$.

(b) Montrer que q et une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Préciser la matrice de q dans la base canonique et utiliser (a) pour donner sa signature.

(c) Déterminer le noyau de q est montrer que le cône isotrope est la réunion de deux hyperplans dont on donnera les équations.