Examen de Probabilités

(durée 3 heures)

Questions de cours.

1. Démontrer la formule des probabilités totales.
2. Enoncer puis démontrer la loi faible des grands nombres en utilisant l'inégalité de Bienaimé Tchebychev.

Exercice 1.– On donne dans le tableau suivant la loi d'un couple aléatoire (X, Y) :

$Y \backslash X$	0	1	2	3
-1	$7/60$	$1/30$	$1/12$	$1/10$
0	$1/20$	$1/20$	$1/12$	$3/20$
1	$1/12$	$1/12$	$1/12$	$1/12$

1– Donner les lois des variables X et Y, puis calculer leur espérance et leur variance.
2– Calculer la covariance de X et Y. Sont-elles indépendantes ?
3– Calculer la probabilité de l'événement $A = \{X = Y\}$.
4– Calculer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

Exercice 2.– Soit X une variable aléatoire ayant pour densité

$$f(x) = 2(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x})\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x).$$

1. Justifier que f définit bien une densité de probabilité.
2. Calculer F_X, la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance de X.
4. On pose $Y = 1 - \mathrm{e}^{-X}$. Justifier pourquoi Y est une variable aléatoire, puis Montrer que Y a pour densité $f_Y(y) = 2y\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$.
5. Calculer l'espérance et la variance de Y .
6. Calculer F_Y, la fonction de répartition de Y .

Exercice 3.– Soit X_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda_n = n$. On pose

$$Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_n - n).$$

1. Montrer que la fonction de caractéristique de la loi de Poisson de paramètre λ est donnée par

$$g(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

2. En déduire l'expression de $\phi_{X_n}(t)$, pour $t \in \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de X_n.
3. Soit $\phi_{Z_n}(t)$ la fonction caractéristique de Z_n. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \mathrm{e}^{-it\sqrt{n}}\phi_{X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

puis en déduire l'expression de $\phi_{Z_n}(t)$.
4. Calculer la limite $\lim_{n\to+\infty} \phi_{Z_n}(t)$ pour tout t (on pourra utiliser un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0 de e^z).
5. Montrer que Z_n converge en loi vers une v.a. Z de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.
6. Soit (Y_i) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1. Montrer que $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ et X_n ont même loi et retrouver le résultat de la question 4. par une autre méthode.

Exercice 4.– On veut déterminer le taux de glycémie dans une population de cobayes. Pour cela, on effectue un dosage du glucose sanguin sur un lot de n cobayes. On admet que le résultat de chaque mesure est une variable aléatoire X_i Normale d'espérance m, taux moyen de glycémie dans la population de cobayes, et de variance σ^2.

Les résultats du dosage effectué sur un lot de 8 cobayes sont les suivants :

$1,17$ $1,16$ $1,15$ $1,18$ $1,19$ $1,20$ $1,16$ $1,21$ grammes par litre

1) Quel est l'estimateur le plus utilisé pour m ? En déduire une estimation ponctuelle pour m.
2) a- Calculer en fonction de m et de σ, l'espérance et la variance de cet estimateur.

b- On suppose que σ^2 est connu et égale à 4.10^{-4}. Construire un intervalle de confiance pour m à 95%.
3) On suppose maintenant que σ^2 est inconnu.

a- Donner l'estimateur le plus utilisé pour σ^2 (donner sa formule). En déduire une estimation ponctuelle pour σ^2.

b- Entre quelles limites peut-on situer maintenant m avec une confiance de 95% ?