Université de Cergy-Pontoise 2016– 2017
L3 Mathématiques, Probabilités – Statistiques
E. Löcherbach et A. Mizrahi

Examen. Mai 2017

Les documents ne sont pas autorisés. Durée de l'épreuve : 3 heures.

Question de cours
Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Markov et en donner une preuve.

Exercice 1 Soit X une variable aléatoire réelle, définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, avec densité de probabilité $f(x) = ax^2 1_{\{-1 \le x \le 1\}}$, où $a > 0$ est une constante.

1. Que vaut a ?
2. Calculer $E(X), Var(X)$ et la fonction de répartition de X.

Exercice 2 Soient X_1, X_2 deux variables indépendantes qui suivent une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Déterminer la loi du couple $(X_1 + X_2, X_2/X_1)$.
2. Quelle est la loi de $X_1 + X_2$?
3. Est-ce que $X_1 + X_2$ et X_2/X_1 sont indépendantes ?

Exercice 3 Soient $\lambda > 0$ et $X_1, \ldots, X_n, \ldots,$ des variables aléatoires i.i.d. de loi de Poisson de paramètre λ.

1. Retrouver l'espérance et la variance de X_1.
2. Montrer que $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
3. Déduire de la question précédente que si pour tout n, Z_n suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ alors la suite de variables aléatoires $\left(\frac{Z_n - n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite.
4. Généralisons ce résultat, soit Y_n une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_n > 0$ avec $\lim \frac{\lambda_n}{n} = a > 0$.
   (a) Déterminer la fonction caractéristique de Y_n.
   (b) En déduire que la fonction caractéristique de $\left(\frac{Y_n - \lambda_n}{\sqrt{na}}\right)$ est définie par $t \mapsto \exp\left[-it\frac{\lambda_n}{\sqrt{na}} - \lambda_n + \lambda_n e^{\frac{it}{\sqrt{na}}}\right]$.
   (c) En déduire que $\left(\frac{Y_n - \lambda_n}{\sqrt{na}}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire normale centrée réduite.

Exercice 4. Soient $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes de loi normale de paramètres $(\vartheta, 1)$, où $\vartheta \in \mathbb{R}$ est un paramètre inconnu, et $f_{(1,\vartheta)}, f_{(2,\vartheta)}, ..., f_{(n,\vartheta)}$ les densités de $X_1, \ldots, X_n$.

1. Calculer la vraisemblance $h(\vartheta, x_1, \ldots, x_n) = f_{(1,\vartheta)}(x_1) f_{(2,\vartheta)}(x_2) \ldots f_{(n,\vartheta)}(x_n)$.
2. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\vartheta}_n$.[1]
3. Dire rapidement sans preuve pourquoi cet estimateur est un "bon" estimateur (comportement lorsque $n \to \infty$?) .

Exercice 5. Soit P une probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{F}$,

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \le \frac{1}{4}.$$

Indication : Montrer que

$$P(A)P(B) = (P(A \cap B) + P(A \cap B^c))P(B).$$

En itérant ce genre d'arguments, montrer que

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(A^c \cap B^c) - P(A \cap B^c)P(B \cap A^c).$$

En déduire que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \le P(B)P(B^c).$$

Conclure.

1. C'est la valeur de ϑ qui maximimise l'expression $h(\vartheta, x_1, \ldots, x_n)$, pour $x_1, \ldots, x_n$ fixés.