Université de Cergy-Pontoise 2015– 2016
L3 Mathématiques, Probabilités – Statistiques
S. Alili et E. Löcherbach

Examen. Juin 2016

Les documents ne sont pas autorisés. Durée de l'épreuve : 2 heures.

Question de cours
Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Markov et en donner une preuve.

Exercice 1 Une variable aléatoire discrète X suit la loi Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Les valeurs que prend X sont affichées sur un écran, mais celui-ci est défaillant. Lorsqu'il doit afficher 0, il affiche n'importe quelle valeur entre 1 et n, au hasard (le reste du temps, le compteur affiche la valeur exacte de X). Soit Y le numéro aléatoire affiché.
a) Donner l'ensemble A de valeurs prises par Y, et calculer $P(Y=k)$ pour tout $k \in A$.
b) Montrer que $E(Y) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} q^n\right) + E(X)$. En déduire $E(Y)$.
c) L'écran affiche le chiffre 1. Quelle est alors la prpobabilité que la v.a. X ait pris réellement la valeur 1 ?

Exercice 2 Soit P une probabilité sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$. Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{A}$,

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Indication : Montrer que

$$P(A)P(B) = (P(A \cap B) + P(A \cap B^c))P(B).$$

En itérant ce genre d'arguments, montrer que

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = P(A \cap B)P(A^c \cap B^c) - P(A \cap B^c)P(B \cap A^c).$$

En déduire que

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq P(B)P(B^c).$$

Conclure.

Exercice 3. Soit U une variable aléatoire uniforme sur $]0,1[$ et soit $h :\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $h(x) = \tan\left(\pi\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. Quelle est la loi de $Y = h(X)$?

Exercice 4. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles, i.i.d., positives, telles que $m := E(X_1) \in (0, \infty)$. Posons $Y_n := X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n$.

1. Calculer $E(Y_n)$. Quelle est la limite de $E(Y_n)$ (en fonction de m)?
2. Quelle limite p.s. est-ce que vous prévoyez donc pour Y_n?

3. Rappelons l'inégalité de Jensen (sans preuve!) : Soit h une fonction convexe, alors $E(h(X)) \leq h(E(X))$, et l'inégalité est stricte, si h est strictement convexe en $x_0 = E(X)$.

   En appliquant la loi forte des grands nombres, version L^1, à la suite $\log X_n$, montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i) \to \varrho$$

   p.s., où ϱ est une constante à déterminer. Donc :

$$Y_n \sim e^{n\varrho} \text{ p.s. losque } n \to \infty.$$

4. Déduire de l'inégalité de Jensen qu'en général, $\varrho < \log m$. Qu'en est-il de votre prévision du point 2. alors?

Exercice 6. Soit $X_1, \ldots, X_n$ un $n-$échantillon de la loi de $\vartheta + Y$ où Y suit une loi exponentielle de paramètre 1, $\vartheta \in \Theta =]0, \infty[$.

1. Montrer que la variable X_1 admet une densité de probabilité qui est donnée par

$$f_\vartheta(x) = e^{-(x-\vartheta)}1_{x>\vartheta}.$$

2. Soit $\bar{X}_n$ la moyenne empirique. Déterminer la constante c telle que

$$\bar{X}_n - c \text{ est un estimateur sans biais de } \vartheta.$$

3. Un autre estimateur possible est $\hat{\vartheta}_n = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. (Pourquoi ?) Montrer, **sans faire le calcul**, que $\hat{\vartheta}_n$ est un estimateur qui est biaisé.

4. Montrer que $\hat{\vartheta}_n$ converge en probabilité vers ϑ lorsque $n \to \infty$.

5. On veut maintenant construire un intervalle de confiance en utilisant l'estimateur $\hat{\vartheta}_n$. Lequel des intervalles suivants est préférable (donnez une justification de votre réponse)?

$$I_1 = [\hat{\vartheta}_n - \delta, \hat{\vartheta}_n + \delta]$$

   ou

$$I_2 = [\hat{\vartheta}_n - \delta, \hat{\vartheta}_n]$$

   ou

$$I_3 = [\hat{\vartheta}_n, \hat{\vartheta}_n + \delta],$$

   pour un $\delta > 0$ à choisir.