Université de Cergy-Pontoise 2015– 2016
L3 Mathématiques, Probabilités – Statistiques
S. Alili et E. Löcherbach

Examen. Mai 2015

Les documents ne sont pas autorisés. Durée de l'épreuve : 3 heures.

Question de cours
Rappeler l'énoncé de l'inégalité de Jensen et en donner une preuve.

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités.

(1) Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$. Rappelons la définition de la probabilité conditionnelle : Pour tout $B \in \mathcal{A}$, on pose $P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Montrer que $P(\cdot|A)$ définit bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(2) Dans une urne contenant initialement $n \geq 1$ boules numérotées de 1 à n, on effectue deux tirages successifs suivant la technique suivante : si on tire au premier coup la boule numéro k, alors celle-ci est remise dans l'urne avec k boules supplémentaires portant toutes le numéro k. On effectue alors le deuxième tirage. On appelle X_1 la variable égale au numéro de la boule tirée au premier coup, et X_2 celle égale au numéro de la boule tirée au deuxième coup.

(a) Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de X_2 et vérifier que $\sum_{k=1}^{n} P(X_2 = k) = 1$.

(c) Montrer que

$$E(X_2) = \frac{1-n}{2} + \frac{3n+1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Indication : $k^2/(n+k) = k - n + n^2/(n+k)$.

Exercice 2 Dans cet exercice, on admet qu'il existe un réel $\lambda > 0$ et deux variables aléatoires réelles X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout couple (j, k) d'entiers on ait :

$$P(\{X = j\} \cap \{Y = k\}) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{e \cdot j! \cdot k!}.$$

1) Déterminer la loi de $X + Y$. En déduire λ.

Si vous ne réussissez pas à déterminer λ, continuez les exercices suivants en gardant λ comme variable dans vos calculs.

2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

3) Calculer l'espérance de $X + Y$ et celle de 2^{X+Y}.

Exercice 3. Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant une densité commune donnée par

$$f(x) = a(1-x) \cdot 1_{\{0 \leq x \leq 1\}} \text{ où } a \text{ est une constante réelle}$$

1) Calculer la valeur de la constante a.
2) Calculer la fonction de répartition de la v.a. X_1.
3) Soit $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}, n \geq 1$.

   (a) Justifier pourquoi M_n est une variable aléatoire. Quel est l'ensemble où celle-ci prend ses valeurs ?
   (b) Calculer la fonction de répartition de la v.a. M_n.

4) Soit $T_n = \sqrt{n}(1 - M_n)$

   (a) Justifier pourquoi T_n est une variable aléatoire. Quel est l'ensemble où celle-ci prend ses valeurs ?
   (b) Calculer la fonction de répartition de la v.a. T_n.
   (c) Montrer que la suite de v.a. converge en loi vers une v.a. T dont on donnera l'ensemble où celle-ci prend ses valeurs ainsi qu'une densité.

<u>Exercice 4</u> Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles.
a) Montrer que la fonction xe^{-x} est croissante sur $[0,1]$.
b) En déduire que pour tout $0 < \varepsilon < 1$, $E\left(\dfrac{|X_n|}{e^{|X_n|}}\right) \leq \varepsilon e^{-\varepsilon} P(|X_n| \leq \varepsilon) + P(|X_n| > \varepsilon)$.
c) Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 en probabilité si et seulement si $\lim_{n\to\infty} E\left(\frac{|X_n|}{e^{|X_n|}}\right) = 0$.

<u>Exercice 5</u>. Une étude portant sur l'IQ d'enfants de cinq ans donne les valeurs suivantes :

$$103 \quad 112 \quad 97 \quad 98 \quad 111 \quad 85 \quad 113 \quad 97 \quad 102$$

On suppose que ces données sont la réalisation d'un $n-$échantillon $X_1, \dots, X_n$ d'une loi $N(m, \sigma^2)$. On pose $\overline{X} = (X_1 + \cdots X_n)/n$ et $s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$. Aide au calculs : pour l'échantillon observé, $\overline{x} = (x_1 + \cdots x_n)/n = 102$ et $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2 = 1045/8 = 130,625$.

1.(QCM)
   a) La variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.
   b) La variable aléatoire $Y = \frac{1}{\sigma/\sqrt{n}}(\overline{X} - m)$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.
   c) La variable aléatoire $Z = \frac{\overline{X}-m}{s_{n-1}/\sqrt{n}}$ suit la loi de Student à $n-1$ degrés de liberté.
   d) La variable aléatoire $W = \frac{\overline{X}-m}{s_{n-1}/\sqrt{n}}$ suit la loi de Student à n degrés de liberté.

On souhaite estimer le paramètre m par un intervalle de confiance au risque de 5%.

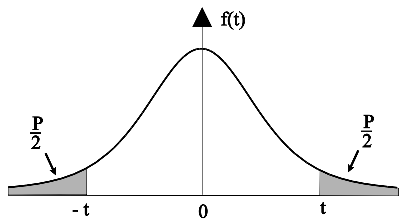
2.(QCM)
   a) Il s'agit d'un intervalle $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(m \in [a,b]) = 0,95$.
   b) On utilisera la table de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.
   c) On utilisera la table de la loi de Student à 9 degrés de liberté.
   d) On utilisera la table de la loi de Student à 8 degrés de liberté.

3.(QCM) On considère les variables aléatoires Y, Z et W définies dans la question 1. En utilisant les tables, on cherchera
   a) $u > 0$ tel que $\mathbb{P}(Y \geq u) = \mathbb{P}(Y \leq -u) = 0,025$,
   b) $u > 0$ tel que $\mathbb{P}(Y \geq u) = \mathbb{P}(Y \leq -u) = 0,05$,
   c) $u > 0$ tel que $\mathbb{P}(|Z| \leq u) = 0,95$,
   d) $u > 0$ et $v > 0$ tels que $\mathbb{P}((n-1)s_{n-1}^2/\sigma^2 \leq u) = \mathbb{P}((n-1)s_{n-1}^2/\sigma^2 \leq v) = 0,025$,
   e) $u > 0$ tel que $\mathbb{P}(W \leq u) = 0,975$.

4. Construire un intervalle de confiance pour m au risque de 5%.

Table de la loi de Student

Valeurs de **T** ayant la probabilité **P** d'être dépassées en valeur absolue



ν	P =0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,260	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	0,127	0,257	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	0,127	0,256	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	0,127	0,256	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	0,127	0,256	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	0,127	0,256	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	0,127	0,256	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,96	2,326	2,576

Nota. ν est le nombre de degrés de liberté.
Le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ se lit dans la colonne $P=\alpha$.
Le quantile d'ordre $1-\alpha$ se lit dans la colonne $P=2\alpha$.