Université de Cergy-Pontoise 2014– 2015
L3 Mathématiques, Probabilités – Statistiques
S. Alili et E. Löcherbach

Examen. Mai 2015

Les documents ne sont pas autorisés. Durée de l'épreuve : 3 heures.

Question de cours
Rappeler l'énoncé du TCL (théorème central limite) et en donner une preuve.

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace de probabilités.

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $P(A) > 0$. Rappelons la définition de la probabilité conditionnelle : Pour tout $B \in \mathcal{A}$, on pose
$$P(B|A) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$
Montrer que $P(\cdot|A)$ définit bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2. Soit maintenant $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$, indépendantes, de même loi μ. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $0 < \mu(A) < 1$. Soit
$$T := \inf\{n : X_n \in A\}, \text{ avec } \inf \emptyset := \infty.$$
   (a) Exprimer $\{T = +\infty\}$ en fonction de $\{T > n\}$.
   (b) Calculer $P(T > n)$ en fonction de $P(X_1 \in A^c)$.
   (c) En déduire que T est fini p.s.

3. Montrer que T suit une loi géométrique de paramètre p où $p = \mu(A^c) = P(X_1 \in A^c)$, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, $P(T = n) = \mu(A)\mu(A^c)^{n-1}$.

4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $P(X_n \in B|T > n) = P(X_n \in B|X_n \in A^c) = \mu(B|A^c)$, pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

5. Monter que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes aussi sous la probalitité conditionnelle $P(.|T > n)$, de même loi.

6. On pose $X_T(\omega) := X_n(\omega)$ si $T(\omega) = n$. Montrer que la loi de X_T est donnée par $P(X_T \in B) = \mu(B|A) = P(X_1 \in B|X_1 \in A)$.

7. Montrer que X_T et T sont indépendants. *Indication :* Il convient d'évaluer $P(X_T \in B, T = n)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. A la fin, il faut utiliser (et montrer) que
$$P(T > n-1)\mu(A) = P(X_1 \in A^c, X_{n-1} \in A^c)P(X_n \in A) = P(T = n).$$

Exercice 2 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ dont la loi conjointe est donnée par
$$P((X,Y) \in A) = \sum_{n\geq 1} 2^{-(n+1)} 1_A(n,n) + C \int_A (1 - x^2y^2) 1_{\{0\leq x,y\leq 1\}} dxdy, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1. Calculer C.

2. Déterminer la loi de X, c'est-à-dire $P(X \in B)$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Puis la loi de Y sans calcul supplémentaire.

3. X et Y sont elles indépendantes?

4. Montrer que X est intégrable et calculer $E(X)$.

Exercice 3. 1. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ dont la loi conjointe est donnée par $P((X,Y)=(n,m)) = \frac{C}{(n+m+1)(n+m)(n+m-1)}, n, m \geq 1$, où C est une constante qu'on ne déterminera pas. Déterminer la loi de $U := X+Y$.
2. Montrer, en utilisant la méthode de votre choix, que la somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson suit toujours une loi de Poisson.

Exercice 4. Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} x^2\mu(dx) < +\infty$, et ayant la propriété suivante: Si X et Y sont des variables aléatoires réelles (non dégénérées, c'est-à-dire pas égales à une constante p.s.) indépendantes et de loi μ alors $X+Y$ suit la même loi que CX pour une certaine constante $C > 0$.
a. En comparant les espérances et variances de $X+Y$ et de CX, trouvez C. Montrer que $\int x\mu(dx) = 0$.
b. Soit maintenant $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles iid de loi μ. Montrer par récurrence, en utilisant les fonctions caractéristiques, que $X_1 + \ldots + X_{2^N} \stackrel{\mathcal{L}}{=} C^N X_1$. En déduire la loi de la variable aléatoire suivante $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{4^n}}{2^n}$.
c. En appliquant le TCL, trouvez μ.

Exercice 6. Le nombre de malades atteints de la maladie E est une variable aléatoire X de loi de Poisson $\mathcal{P}(\vartheta)$, où $\vartheta > 0$ est inconnu. On note $X_1, \cdots, X_n$ un $n-$échantillon de loi $\mathcal{P}(\vartheta)$ et on considère $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ et $\tilde{S}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$.

1. Donner la loi de $n\bar{X}$ et calculer $E(\bar{X})$ et $Var(\bar{X})$.

2. En déduire un estimateur pour ϑ. Quelles sont les propriétés de cet estimateur que vous connaissez ? Laquelle de ces propriétés vous semble la plus importante ?

3. (QCM)
En supposant que l'echantillon observé $x_1, \ldots, x_n$ est donné avec $n = 100$, on souhaite estimer ϑ par un intervalle de confiance au risque de 5%.
   a) On utilisera la table de la loi Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.
   b) On utilisera la table de la loi χ^2_{n-1}.
   c) Il s'agit d'un intervalle $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(\vartheta \in [a,b]) = 0,95$.
   e) Il s'agit d'un intervall $[A,B]$ avec A, B des variables aléatoires rélles telles que $\mathbb{P}(\vartheta \in [A,B]) = 0,95$.

4. Donner maintenant explicitement cet intervalle de confiance au risque de 5% pour estimer ϑ.