2024/2025
Semestre 2 – L3
Mercredi 30 Avril 2025

Géométrie

Examen Final

◁ Consignes ▷

Durée : 120 mn

- Les documents et les supports électroniques sont interdits.
- L'épreuve est composée d'exercices indépendants.
- Le barème est à titre indicatif.
- La qualité de la rédaction et la rigueur des justifications seront prises en compte dans la notation.

◁ Sujet de l'épreuve ▷

Exercice 1 Une Rotation

Dans tout l'exercice, on assimilera un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ au vecteur colonne de ses coordonées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On rappelle alors la définition du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^3$:

$$\langle x, y \rangle := {}^t x y,$$

où ${}^t x$ désigne la transposée de x. Si $\mathcal{A}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ alors l'orthogonal de $\mathcal{A}$ est défini ainsi:

$$\mathcal{A}^\perp := \{x \in \mathbb{R}^3, \langle x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{A}\},$$

c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
2. Trouver e_1 de norme 1, tel que $Ae_1 = e_1$.
3. Montrer que les vecteurs:
$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad e_3 := \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
forment une base orthonormée de $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp$.
4. Donner P la matrice orthogonale de passage de la base canonique à $\mathcal{B} := (e_1, e_2, e_3)$.
5. Soit f l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique, et B la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Expliciter B.
6. En déduire que A est la matrice d'une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(e_1)$ et d'angle $\frac{-2\pi}{3}$.

Réponse.
1. Les colonnes de la matrice sont orthogonales et normées et elle est de déterminent 1. Autre méthode, par le calcul montrer que: $A^t A = \mathrm{I}_3$.
2. Poser le système et le résoudre, on trouve: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Montrer qu'ils forment une famille orthonormée ($\langle e_2, e_3 \rangle = 0$ et $\langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = 1$) et ils sont et orthogonaux à e_1 ($\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 0$). Il suffit de faire les calculs de tous ces produits scalaires.

4. Écrire la matrice de passage ($P = (e_1, e_1, e_3)$) et trouver par le calcul: $B = P^t A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$

5. D'après la première question, A est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ d'où c'est une rotation. L'axe est le sous-espace propre associé à la val. propre 1, ici c'est $\mathrm{Vect}(e_1)$ (première question). Puisque (e_2, e_3) est orthogonale à e_1, on sait que la restriction de la rotation induite par A à $\mathrm{Vect}(e_1)^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ (d'après la question 3) est la matrice d'une rotation. On en déduit que B doit avoir la forme: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où θ est l'angle de la rotation. Ici, on trouve $\theta = \frac{-2\pi}{3}$.

Exercice 2 Transformations affines

Soit $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux $\mathbb{R}$-espaces affines de directions respectives E et E'.

1. Soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ une transformation affine, rappeler la définition. On note $\overrightarrow{f}$ l'application sous-jacente.
2. Montrer que f est injective si, et seulement si, $\overrightarrow{f}$ l'est.
3. Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, de direction F. Rappeler la définition de $f(\mathcal{F})$ et montrer qu'il s'agit d'un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$, on précisera sa direction.
4. On rappelle qu'une droite (affine) de $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine dont la direction est de dimension 1. En déduire que si f est injective alors f envoie une droite de $\mathcal{E}$ sur une droite de $\mathcal{E}'$.
5. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$, rappeler la définition de $\mathcal{F}$ parallèle à $\mathcal{F}'$. En déduire que f envoie deux droites parallèles sur deux droites parallèles.

Réponse. 1. Il existe $\overrightarrow{f} : E \to E'$ linéaire telle que $f(P + \overrightarrow{x}) = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$.

2. Soit $O \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{f})$, alors $f(O + \overrightarrow{v}) = f(O)$ (en appliquant la question précédente) et si f injective alors O et $O + \overrightarrow{v}$ coïncident et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

   Réciproquement si x et y ont même image, $\overrightarrow{f(x)f(y)}$ est le vecteur nul. On rappelle que $\overrightarrow{f(x)f(y)} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{xy})$ et ainsi si $\overrightarrow{f}$ est injective, $\overrightarrow{xy}$ est le vecteur nul et $x = y$.

3. F sev de E et il existe $P \in \mathcal{F}$ tq:
$$\mathcal{F} = P + \mathcal{F}.$$
   On rappelle:
$$f(\mathcal{F}) = \{f(A) \in \mathcal{E}', A \in \mathcal{F}\}$$
   on en déduit: $f(\mathcal{F}) = f(P) + \overrightarrow{F}$. C'est la définition d'un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F}$ (sev de E car $\overrightarrow{f}$ est linéaire).

4. D'après la question 2 $\overrightarrow{f}$ est aussi injective et ainsi l'image d'une droite à même dimension que son image: 1.

5. Deux sous-espaces sont parallèles s'ils ont même direction. Or, f envoie un espace de direction F sur un espace de direction $f(F)$, ainsi le parallélisme est respecté.

Exercice 3 Renversements et groupe orthogonal

Dans tout l'exercice, on notera $A \cdot B$ le produit matriciel de deux matrices A et B quand il existe, et on assimilera un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ au vecteur colonne de ses coordonées dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $M \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, on rappelle que M est une symétrie si $M^2 = \mathrm{I}_3$.

1. Soit M une symétrie, expliquer pourquoi M est diagonalisable, avec comme seules valeurs propres possibles 1 et -1. Ainsi, une symétrie est caractérisée par ses deux sous-espaces propres:
$$E_+(M) := \mathrm{Ker}(M - \mathrm{I}_3) \text{ et } E_-(M) = \mathrm{Ker}(M + \mathrm{I}_3)$$

qui vérifient :

$$\mathbb{R}^3 = E_+(M) \oplus E_-(M).$$

De plus, on dit que M est un renversement d'axe $E_+(M)$ si $\dim(E_-) = 2$. On dit aussi que M est une rotation d'axe $E_+(M)$ et d'angle π. Soit D une droite vectorielle, on note σ_D l'unique renversement d'axe D, i.e. tel que $D = E_+(\sigma_D)$.

2. Soit D une droite vectorielle, $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$, et $h := g \cdot \sigma_D \cdot g^{-1}$.
   (a) Montrer que h est une symétrie.
   (b) On note $g(D)$ l'image de D par l'endomorphisme représenté par g dans la base canonique, autrement dit, $g(D) = \{y \in \mathbb{R}^3, \exists x \in D \text{ tel que } g \cdot x = y\}$. Montrer que $E_+(h) = g(D)$. (On rappelle que $x \in g(D) \iff g^{-1}(x) \in D$.)
   (c) En déduire que $h = \sigma_{g(D)}$, autrement dit que $g \cdot \sigma_D \cdot g^{-1}$ est le renversement d'axe $g(D)$.

3. On note $\mathbb{S}$ la *sphère unité de* $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\mathbb{S} := \{x \in \mathbb{R}^3, ||x|| = 1\}.$$

   où $||\cdot||$ désigne la norme associée au produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ (i.e. un sous-espace vectoriel de dimension 2), montrer que $P \cap \mathbb{S} \neq \emptyset$, en déduire que $\mathbb{S}$ intersecte tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

4. Soit $g \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si g est un renversement, alors il existe $x \in \mathbb{S}$ tel que $g \cdot x = -x$.
   (b) Montrer que s'il existe $x \in \mathbb{S}$ tel que $g \cdot x = -x$ et si g est une rotation d'axe D et d'angle θ, alors $\theta = \pi$.
   (c) En déduire que g est un renversement si, et seulement si, il existe $x \in \mathbb{S}$ tel que $g(x) = -x$.

5. Soit G un sous groupe de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$. Expliquer pourquoi l'application:

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathbb{S} & \to & \mathbb{S} \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

   est bien définie et définit ainsi une action de G sur $\mathbb{S}$, puis rappeler la définition de G *agit transitivement sur* $\mathbb{S}$. On suppose que G agit transitivement sur $\mathbb{S}$ dans la suite.

6. En utilisant les deux questions précédentes, montrer que G contient un renversement. On le note σ_D et donc D son axe.

7. Soit D' une autre droite vectorielle, montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $g(D) = D'$. (On pourra choisir astucieusement x et x', deux vecteurs directeurs de D et D', et utiliser les propriétés de G.)

8. En déduire, à l'aide de la Question 2 (c), que G contient le renversement $\sigma_{D'}$, et qu'ainsi G contient tous les renversements. En déduire finalement qu'alors $G = \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Réponse. 1. $M^2 = \mathrm{Id}$, on trouve ainsi un polynôme annulateur scindé à racines simples et M est diagonalisable. De plus les seuls valeurs propres possibles sont les racines de ce polynôme annulateur: 1 et -1.

2. (a) C'est une symétrie: $h^2 := g \cdot \sigma_D \cdot g^{-1} g \cdot \sigma_D \cdot g^{-1} = g \cdot \sigma_D^2 \cdot g^{-1} = g \cdot g^{-1} = \mathrm{Id}$. (b) Montrons $E_+(g \circ \sigma_D \circ g^{-1}) = g(D)$ par double inclusion. Si $x \in E_+(g \circ \sigma_D \circ g^{-1})$ alors $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}(x) = x$, en composanat par g^{-1} à gauche, on obtient $\sigma_D \circ g^{-1}(x) = g^{-1}(x)$, d'où $g^{-1}(x) \in D$ et donc, $x \in g(D)$.

   Réciproquement, si $x = g(y) \in g(D)$ alors $g \circ \sigma_D \circ g^{-1}(x) = g \circ \sigma_D \circ g^{-1}(g(y)) = g \circ \sigma_D(y) = g(y)$ (car $\sigma_D(y) = y$).

   Enfin, g est inversible donc $g(D)$ et D ont même dimension.

3. $e_1/||e_1||$ convient.

4. Si g est un renversement, on prend $x \in D^\perp \cap \mathbb{S}$, il convient. Réciproquement, si $x \in \mathbb{S}$ satisfait la propriété, on rappelle que g est une rotation et on note D son axe. Alors $x \in D^\perp$ d'après le début de la question. On sait que g restreinte à $D^\perp$ est une rotation, le seul angle possible c'est π.

5. $\forall x, y \in \mathbb{S}, \exists g \in G, g(x) = y$.

6. Soit $x \in \mathbb{S}$ alors $-x$ aussi et il existe $g \in G$ tq $g(x) = -x$ par transitivité, on conclut avec la question précédente.

7. Soit x et x' les vecteurs directeurs, on les prend normés, i.e. dans $\mathbb{S}$. Alors il existe $g \in G$ tq $g(x) = x'$ par transitivité. Alors $g(D) = D'$.

8. On a $g \circ \sigma_D \circ g^{-1} \in G$ pour le g précédent (car produit d'éléments de G). D'après la question 2 $g \circ \sigma_D \circ g^{-1} = \sigma_{g(D)} = \sigma_{D'}$. Donc G contient n'importe quel renversement, or $\mathrm{SO}(E)$ est engendré par les renversements.