Année 2022-2023
L3

Examen final de Géométrie

Exercice 1 (5 pts)**.** Soit $a \in \mathbb{R}$ et soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ les droites de $\mathbb{A}^3(\mathbb{R})$

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x_1 - ax_3 + 1 &= 0 \\ x_2 - 2x_3 - 3 &= 0 \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x_1 - \ \ x_3 + 2 &= 0 \\ x_2 - 3x_3 + 1 &= 0 \end{cases}$$

a) Calculer leur directions D_1, D_2. Les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ sont elles parallèles?

b) Trouver $A_1, A_2 \in \mathbb{A}^3(\mathbb{R})$ et $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $\mathcal{D}_1 = A_1 + \langle v_1 \rangle$, $\mathcal{D}_2 = A_2 + \langle v_2 \rangle$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les droites soient coplanaires.

Exercice 2 (3 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine dirigé par E. Soit $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ une application affine. Démontrer que l'ensemble des points fixes de ϕ est ou bien vide ou bien un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{\phi} - id_E)$.

Exercice 3 (4 pts)**.** Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension 3 dirigé par E .

a) Soient $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux sous-espace affines de $\mathcal{E}$. Démontrer que $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est ou bien vide ou bien dirigé par $F \cap F'$.

b) Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathcal{E}$, soient $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ deux droites distinctes de $\mathcal{P}$ et soit $A \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{P}$. Trover la dimension de $\mathcal{F} = \langle A, \mathcal{D} \rangle$, $\mathcal{F}' = \langle A, \mathcal{D}' \rangle$ et de $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. Justifier la réponse.

Exercice 4 (4 pts)**.**

a) Soit $\{(A_i, \lambda_i) | i = 1, ..., r\}$ un système massique de l'espace affine $\mathcal{E}$ de barycentre G. Démontrer que $G \in \langle A_1, ..., A_r \rangle$.

b) Existent-ils dans le plan affine quatre points A, B, C, M (pas forcement distincts) tels que

$$M = Bar((A,1),(B,1),(C,1)) \quad \text{et} \quad M = Bar((A,2),(B,0),(C,2))?$$

Justifier la réponse.

Exercice 5 (5 pts)**.** Soit E est un plan vectoriel euclidien *orienté* et $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe fixée de E. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soient s_θ, $r_\theta \in O(E)$ tels que

$$M_{\mathcal{B}}(s_\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ sin\theta & -cos\theta \end{pmatrix}, \qquad M_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

a) *Démontrer* que s_θ est une symétrie orthogonale s_D en précisant qui est la droite D.

b) Écrire r_θ comme le produit de deux reflexions orthogonales s_{D_1} et s_{D_2} et démontrer que on peut choisir une de deux droites à notre convenience.

c) Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de direction E. Soit $\rho_{A,\theta}$ la rotation affine centrée en A (i.e. ayant A comme unique point fixe) et d'angle θ. Déduire de la question précédente qu'il est possible d'écrire $\rho_{A,\theta}$ comme le produit de deux reflexions orthogonales $\sigma_{\mathcal{D}_1}$ et $\sigma_{\mathcal{D}_2}$ en choisissant une de deux droites à notre convenience.

d) Quel type d'isometrie est $\rho_{A,\theta} \circ \rho_{A',\theta'}$? Cela dépendra de θ, θ'. Justifier la réponse.

e) Dans le cas où $\rho_{A,\theta} \circ \rho_{A',\theta'}$ est une rotation affine, qui est son centre? Justifier la réponse.