Indications pour les solutions et le barème de l'examen

Solution de l'exercice 1. Comme $|f(x,y)| \le |x| + |y|$, on voit que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0. \quad \textbf{(2 points)}$$

D'autre part, pour trouver la limite itérée, il faut d'abord calculer la limite suivante pour $0 < |x| \ll 1$:

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0}(x+y)\sin(1/x)\sin(1/y) = x\sin(1/x)\lim_{y\to 0}\sin(1/y).$$

Cette limite n'existe pas si $\sin(1/x) \neq 0$. **(2 points)** $\square$

Solution de l'exercice 2. Montrons que la fonction n'est pas uniformément continue. Il suffit de trouver un nombre $\delta > 0$ et deux suites (x_n), (y_n) telles que $\|x_n - y_n\| \to 0$ quand $n \to \infty$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \ge \delta$ pour tout $n \ge 1$. **(2 points)**

On pose $x_n = (n + \frac{1}{n}, 0, \dots, 0)$, $y_n = (n, 0, \dots, 0)$. Alors $\|x_n - y_n\| = \frac{1}{n} \to 0$,

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left(n + \tfrac{1}{n}\right)^2 - n^2 = 2 + n^{-2} \ge 2. \quad \textbf{(2 points)}$$

$\square$

Solution de l'exercice 3. **(1)** La fonction est bien définie sur l'ouvert

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

C'est le domaine maximal. **(1 point)**

(2) On a $\nabla f(x,y) = (y^2 x^{y-1}, x^y(1 + y\ln x))$. Par conséquent,

$$\nabla f(1,2) = (4,1), \quad \mathrm{d}f(1,2)[h] = 4h_1 + h_2. \quad \textbf{(1 point)}$$

(3) Si la fonction est identiquement égale à 2, alors sa différentielle s'annule en tout point. Supposons maintenant que $g \not\equiv 2$. Alors g a soit un maximum strictement plus grand que 2, soit un minimum strictement plus petit que 2. Dans les deux cas, la différentielle en ce point est égale à zéro. **(1 point)** $\square$

Solution de l'exercice 4. Le vecteur normal à la surface $F(x,y,z) = 0$ au point (x_0, y_0, z_0) est donné par

$$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{\nabla F(x_0,y_0,z_0)}{\|\nabla F(x_0,y_0,z_0)\|}, \quad \textbf{(1 point)}$$

et le plan tangent s'écrit sous la forme

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0. \quad \textbf{(1 point)}$$

Dans notre cas particulier, on obtient

$$n = \frac{1}{17}(9, 8, 12),$$

$$9(x-3) + 8(y-1) + 12(z-12) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 9x + 8y + 12z = 179. \quad \textbf{(1 point)}$$

$\square$

Solution de l'exercice 5. On a $f(x,y) = \exp(\ln x \ln y)$. Par conséquent,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\ln y}{x} f, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ln x}{y} f, \quad \textbf{(2 points)}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\ln y(\ln y - 1)}{x^2} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\ln x(\ln x - 1)}{y^2} f, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\ln x \, \ln y + 1}{xy} f.$$

Au point $(2,1)$, on obtient

$$f = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \ln 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \ln 2(\ln 2 - 1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2}.$$

Le développement de Taylor s'écrit sous la forme

$$f(x,y) = 1 + \ln 2\,(y-1) + \frac{\ln 2(\ln 2 - 1)}{2}(y-1)^2 + \frac{(x-2)(y-1)}{2} + o((x-2)^2 + (y-1)^2).$$

(2 points) □

Solution de l'exercice 6. On pose $F(x,y) = 3x + y + 2u - e^{x+y+u}$. Alors

$$F(1,0,-1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(1,0,-1) = 1.$$

Par conséquent, on peut appliquer le TFI et conclure que l'équation en question définit une fonction implicite $u = f(x,y)$ au voisinage du point $(1,0,-1)$. **(2 points)**

On a $f(1,0) = -1$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial u} = -2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial u} = 0,$$

où les valeurs numériques sont calculées au point $(1,0,-1)$. La différentielle de f au point $(1,0)$ a donc la forme $\mathrm{d}f(1,0)h = -2h_1$. **(2 points)** □