

ESPACES VECTORIELS NORMÉS ET CALCUL DIFFÉRENTIEL (L3)

Examen du 2 mai 2025, durée : 3 heures

Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1 (4 points). Soit $f(x, y) = (x + y) \sin(1/x) \sin(1/y)$. Montrer que la limite itérée

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$$

n'existe pas, mais la fonction f converge vers 0 quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

Exercice 2 (4 points). Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x_1^4 + \cdots + x_m^4}.$$

La fonction f est-elle uniformément continue ?

Exercice 3 (3 points). 1. Déterminer l'ouvert maximal de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction $f(x, y) = yx^y$ est bien définie.

2. Calculer la différentielle de la fonction f définie ci-dessus au point $(1, 2)$.

3. On note $\bar{B}(0, r) \subset \mathbb{R}^m$ la boule fermée de centre 0 et de rayon $r > 0$. Montrer que si $g : \bar{B}(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue différentiable dans l'intérieur de la boule (notée $B(0, r)$) et égale à 2 sur le bord, alors il existe un point $a \in B(0, r)$ tel que $dg(a) = 0$.

Exercice 4 (3 points). Trouver le plan tangent et le vecteur normal à la surface $3x^2 + 4y^4 + z^2 = 175$ au point $P = (3, 1, 12)$.

Exercice 5 (4 points). Écrire le développement de Taylor de la fonction $f(x, y) = y^{\ln x}$ à l'ordre 2 au point $P = (2, 1)$.

Exercice 6 (4 points). 1. Montrer que l'équation $3x + y + 2u = e^{x+y+u}$ définit implicitement une fonction $u = f(x, y)$ de classe C^1 dans un voisinage du point $(x, y, u) = (1, 0, -1)$.

2. Calculer la différentielle de la fonction $f(x, y)$ au point $(x, y) = (1, 0)$.