Espaces vectoriels normés et calcul différentiel (L3)

Examen du 7 mai 2024, durée : 3 heures

Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1 (4 points). 1. Trouver les limites suivantes:

$$\lim_{y\to a}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x}\Big), \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}.$$

2. La fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par la formule $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4-1}$, est-elle uniformément continue sur son domaine de définition ?

Exercice 2 (5 points). 1. On définit $f(x,y)=yx^y$ pour $x,y>0$. Calculer la différentielle de f au point donné (a,b).

2. Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert connexe et $f\in C^1(D,\mathbb{R})$. Est-il vrai que si $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$ dans D, alors f ne dépend pas de y quand (x,y) varie dans D?

Exercice 3 (3 points). Écrire le développement de Taylor de la fonction $f(x,y)=x\ln(1+y)$ à l'ordre 2 au point $P=(1,1)$.

Exercice 4 (4 points). Considérons la fonction suivante définie pour $x>0$, $y>0$:

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

1. Trouver tous les points critiques de f.
2. Calculer la matrice hessienne aux points critiques de f.
3. Déterminer la nature des points critiques de f.
4. Trouver le maximum et le minimum de f, si ils existent.

Exercice 5 (6 points). 1. Soit $f:\mathbb{R}^2_x\to\mathbb{R}^2_y$ une fonction. Énoncer le théorème d'inversion locale.

2. Montrer que les équations

$$\begin{cases} xy=\cos u\cdot\cos v,\\ \ \ y=x\cos u\cdot\sin v\end{cases}$$

définissent implicitement des fonctions $u=f(x,y)$, $v=g(x,y)$ de classe C^1 dans un voisinage du point $P=(x_0,y_0,u_0,v_0)=(1,1/2,\pi/4,\pi/4)$ et donner les différentielles des fonctions f,g au point $(1,1/2)$.

Corrigé de l'examen du 7 mai 2024

Solution de l'exercice 1. **(1 point pour chaque limite)**

$$\lim_{y\to a}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{\sin xy}{x}\Big)=a,\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{x^2y^2}=1.$$

La fonction f n'est pas uniformément continue sur le complémentaire de la boule ouverte de centre $(0,0)$ et de rayon 1 **(2 points)**. □

Solution de l'exercice 2. 1. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y^2x^{y-1},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x^y(1+y\ln x)\quad \textbf{(2 points)}.$$

Par conséquent, la différentielle de f au point (a,b) a la forme

$$\mathrm{d}f(a,b)[h_1,h_2]=a^{b-1}\big(b^2h_1+a(1+b\ln a)h_2\big)\quad \textbf{(1 point)}.$$

2. La propriété est fausse si D n'est pas convexe **(2 points)**. □

Solution de l'exercice 3. La formule de Taylor à l'ordre 2 au point $P=(a,b)$ a la forme **(1 point)**

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(P)+f_x(P)(x-a)+f_y(P)(y-b)\\&\quad+\frac{1}{2}\big(f_{xx}(P)(x-a)^2+2f_{xy}(P)(x-a)(y-b)+f_{yy}(P)(y-b)^2\big)\\&\quad+o\big((x-a)^2+(y-b)^2\big).\end{aligned}$$

On calcule les dérivées **(1 point)**:

$$f_x=\ln(1+y),\quad f_y=\frac{x}{1+y},\quad f_{xx}=0,\quad f_{xy}=\frac{1}{1+y},\quad f_{yy}=-\frac{x}{(1+y)^2}.$$

On obtient ainsi **(1 point)**

$$\begin{aligned}f(x,y)&=\ln 2+(\ln 2)(x-1)+\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{2}(x-1)(y-1)-\frac{1}{8}(y-1)^2\\&\quad+o\big((x-1)^2+(y-1)^2\big).\end{aligned}$$

□

Solution de l'exercice 4. 1. $f_x=2x+y-x^{-2}$, $f_y=2y+x-y^{-2}$ **(0.5 point)**. Il y a un seul point critique: $P=3^{-1/3}(1,1)$ **(0.5 point)**.

2. $f_{xx}=2+2x^{-3}$, $f_{xy}=1$, $f_{yy}=2+2y^{-3}$ **(0.5 point)**. La hessienne a donc la forme

$$H_f(P)=\begin{pmatrix}8&1\\1&8\end{pmatrix}\quad \textbf{(0.5 point)}.$$

3. La hessienne est définie positive, d'où on conclut que P est un minimum local **(1 point)**.

4. Comme $f \to +\infty$ quand $x \to 0^+$, il n'y a pas de maximum global pour f **(0.5 point)**. D'autre part, comme $f \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ ou $y \to 0^+$ ou $x \to +\infty$ ou $y \to +\infty$, la fonction possède un minimum global. On sait que f possède un unique point critique P. Le minimum de f est donc égal à $f(P) = 3^{4/3}$ **(0.5 point)**.

$\square$

Solution de l'exercice 5.

1. Theorem d'inversion locale

Soit $X \subset \mathbb{R}^2_x$ un ouvert, $k \geq 1$ un entier, $f \in C^k(X, \mathbb{R}^2_y)$ une fonction et $P \in U$ un point tel que la différentielle $\mathrm{d}f(P) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ soit inversible. Alors il existe des ouverts $U \subset X$ et $V \subset \mathbb{R}^2_y$ tels que:

- $P \in U$, $f(P) \in V$;
- $f : U \to V$ est une bijection;
- la fonction réciproque de $f\big|_U$ notée g est de classe C^k, et sa différentielle est donnée par la formule $dg(y) = df^{-1}(g(y))$ pour $y \in V$. **(2 points)**

2. On pose

$$F(x, y, u, v) = (xy - \cos u \cdot \cos v, y - x \cos u \cdot \sin v).$$

Alors $F(P) = (0, 0)$, et la différentielle de F par rapport à (u, v) est donnée par la matrice jacobienne

$$\frac{\partial F}{\partial(u, v)} = \begin{pmatrix} \sin u \cdot \cos v & \cos u \cdot \sin v \\ x \sin u \cdot \sin v & -x \cos u \cdot \cos v \end{pmatrix}. \quad \textbf{(1 point)}$$

Au point P, on obtient la matrice

$$\frac{\partial F}{\partial(u, v)}(P) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc appliquer le TFI et obtenir des fonctions de classe C^1 dans un voisinage du point P **(1 point)**.

Pour calculer les dérivées, on utilise la formule

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = -\Big(\frac{\partial F}{\partial(u, v)}\Big)^{-1} \frac{\partial F}{\partial(x, y)}. \quad \textbf{(1 point)}$$

Au point $(1, 1/2)$ on obtient

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $f_x = 0$, $f_y = -2$, $g_x = -1$, $g_y = 0$ au point $(1, 1/2)$, d'où on conclut que

$$\mathrm{d}f(1, 1/2)h = -2h_2, \quad \mathrm{d}g(1, 1/2)h = -h_1. \quad \textbf{(1 point)}$$

$\square$