Espaces vectoriels normés et calcul différentiel (L3)

Examen du 18 avril 2023, durée : 3 heures

Tous les calculs et toutes les réponses doivent être justifiés
Une rédaction succincte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1 (6 points). Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0, y > 0\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$.

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer la hessienne pour chaque point critique.
3. Trouver tous les extrema locaux et globaux de la fonction f.

Exercice 2 (6 points). Soit $f(x) = (x^2 - 3x + 4)e^x$. Le but de cet exercice est de montrer que f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans un intervalle que l'on déterminera. (Les résultats du cours utilisés dans cet exercice doivent être clairement énoncés.)

1. Montrer que f est une fonction strictement monotone.
2. Montrer que f est un difféomorphisme local.
3. Déterminer l'image de f et montrer que f est un difféomorphisme global.

Exercice 3 (6 points). Soit $n \geq 1$ et $M_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices de taille $n \times n$. Si $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$, on définit $\|M\| := \max_{i,j} |m_{i,j}|$. On admettra qu'il s'agit d'une norme sur $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $M, N \in M_n(\mathbb{R})$, alors $\|MN\| \leq n\|M\| \, \|N\|$.

On fixe une matrice inversible $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose

$$f(M) := 2M - MAM.$$

2. Montrer que f est différentiable en tout point $M \in M_n(\mathbb{R})$. Que vaut la différentielle $Df(M)$?
3. Montrer que l'application qui associe à M la différentielle $Df(M)$ est continue de $M_n(\mathbb{R})$ dans l'espace des applications linéaires dans $M_n(\mathbb{R})$.
4. Calculer $Df(A^{-1})$ et montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $\|M - A^{-1}\| \leq \delta$, alors $|||Df(M)||| \leq 1$, où $|||\cdot|||$ désigne la norme matricielle associée à $\|\cdot\|$.
5. Calculer $f(A^{-1})$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que si $\|M - A^{-1}\| \leq \delta$, alors $\|f(M) - A^{-1}\| \leq \delta$.

Exercice 4 (6 points). Montrer que l'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 1$ définit implicitement une fonction $y = g(x)$ de classe C^2 au voisinage du point $(0, 1)$ et donner le développement limité à l'ordre 2 de g en 0.