L3 Mathématiques
20 Juin 2017

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique. Seconde session.

Durée: 3h. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.

Exercice 1 (6pts). Soit $E = C^0([-1,1])$ l'ensemble des fonctions continues sur $[-1,1]$ et $f(x) = 1 - x^4$.

a) Déterminer L le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points d'abscisses $x = -1$, $x = 0$ et $x = 1$ de la fonction f. Tracer le graphe de L.

On munit maintenant E du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

et $\| \ \|_2$ la norme associée à ce produit scalaire. On note $(P_n)_n$ la suite de polynômes unitaires orthogonalisés à l'aide de la méthode de Gram-Schmidt, en partant de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$.

b) Calculer les polynômes P_0, P_1 et P_2.

c) Déterminer Q le polynôme de meilleure approximation de degré au plus de 2 de la fonction f pour la norme $\| \ \|_2$. Comparer $\|f - Q\|_2$ et $\|f - L\|_2$.

Exercice 2 (5pts). Soit $E = C^0([0,1])$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application $\Phi : E \to E$ suivante. Si $f \in E$, $\Phi(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par

$$\Phi(f) : x \mapsto \int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Déterminer $\Phi(g)$ où g est la fonction constante égale à 1. Calculer $\|g\|_\infty$ et $\|\Phi(g)\|_\infty$.

b) Justifier que si $f \in E$ on a bien $\Phi(f) \in E$ et que Φ est une application linéaire.

c) Montrer que Φ est continue.

d) Montrer que $\|\Phi\|_{L(E)} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 (5pts). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^3 - 3x(1+y^2)$.

a) Calculer les points critiques de f et déterminer leur nature (minimum local, maximum local ou point selle).

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \le 1\}$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$.

b) Montrer que f admet un minimum m et un maximum M sur D.

c) En utilisant le résultat de la question a), justifier que ces extrema sont atteints sur l'ensemble C.

d) Enoncer le théorème des extremas liés.

e) Déterminer m et M.

Exercice 4 (4pts). Dans tout l'exercice on se place dans $M_n(\mathbb{R})$ muni de la norme: si $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ alors $\|M\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} m_{ij}^2}$. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = \mathrm{Tr}({}^tMM + M)$, où ${}^tM$ désigne la matrice transposée de M et Tr désigne la trace.

a) Justifier que f est différentiable et déterminer sa différentielle.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on ait $\mathrm{Tr}(AM) = 0$. Montrer que $A = 0$.

c) Déterminer le(s) point(s) critique(s) de f.