L3 Mathématiques
2 Mai 2017

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 4h. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
Total des points sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1. [5pts] On considère l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & \cos(\mathrm{e}^t + y(t)), \\ y(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

a) Montrer qu'il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle ci-dessus. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie? Justifier votre réponse.

Etant donné $T > 0$, on considère sur $[0, T]$ le schéma numérique

$$\left\{\begin{array}{rcl} y_{n+1} & = & y_n + \frac{h}{2}\cos\left(\mathrm{e}^{t_n} + y_n\right) + \frac{h}{2}\cos\left((\mathrm{e}^{t_n+h} + y_n + h\cos(\mathrm{e}^{t_n} + y_n)\right), \qquad n = 0, \ldots, N-1, \\ y_0 & = & 1, \end{array}\right.$$

où $h = \frac{T}{N}$ et $t_n = nh$, $n = 0, \ldots, N-1$.

b) Donner la fonction $\phi(t, y, h)$ définissant le schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$.

c) Montrer que ce schéma est consistant et stable. On précisera une valeur de la constante de stabilité S (on pourra noter qu'on a toujours $0 \leq h \leq T$).

d) Montrer que ce schéma est d'ordre au moins 2.

Exercice 2. [7pts] Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P_f(0) = f(0), \quad P_f'(0) = f'(0), \quad P_f(1) = f(1) \quad \text{et} \quad P_f'(1) = f'(1).$$

b) Soit $x \in]0, 1[$ fixé. On définit les fonctions R, Π et F sur $[0, 1]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = t^2(t-1)^2 \quad \text{et} \quad F(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

i) Que valent $F'(0)$ et $F'(1)$?
ii) Montrer que F s'annule en 3 points distincts que l'on précisera.
iii) En déduire que F' s'annule en 4 points distincts puis qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.
iv) Montrer que $R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(x)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 |\Pi(t)|\,\mathrm{d}t$. En déduire la majoration $\|f - P_f\|_1 \leq \dfrac{M_4}{720}$ où $M_4 = \max\limits_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)|$. On rappelle que $\|g\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |g(t)|\,\mathrm{d}t$.

d) On prend la fonction $f(x) = x^5$.
i) Calculer le polynôme P_f.
ii) Calculer $\|f - P_f\|_1$. Que peut-on en conclure sur la majoration obtenue au c).

Exercice 3. [8pts] Soit ℓ^∞ l'espace des suites réelles bornées, muni de la norme $\|(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\geq 0} |u_n|$. On considère la fonction $f : \ell^\infty \to \ell^\infty$ définie par : si $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ alors $f(U)$ est la suite de terme général $u_n u_{n+1}$, i.e. $f\big(U\big) = (u_n u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Soit $V \in \ell^\infty$ définie par $V = (-2, 3, -2, 3, -2, 3, \ldots)$. Calculer $f(V)$, $\|V\|$ et $\|f(V)\|$.

b) Justifier que si $U \in \ell^\infty$ on a bien $f(U) \in \ell^\infty$.

c) Soit $W \in \ell^\infty$ la suite constante égale à 1

i) Si $H = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quel est le terme général de la suite $f(W + H)$?

ii) Montrer que f est différentiable en W de différentielle l'application

$$L : H = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto L(H) = (h_{n+1} + h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

On précisera bien les espaces de départ et d'arrivée de l'application L.

d) Soit $U \in \ell^\infty$. Montrer que f est différentiable en U de différentielle l'application

$$L_U : H = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto L_U(H) = (u_n h_{n+1} + u_{n+1} h_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

e) Montrer que f est de classe C^1.

f) i) Montrer que pour tout $U \in \ell^\infty$ on a $\|Df(U)\| \leq \sup_n(|u_n| + |u_{n+1}|)$. (On précisera bien de quelle norme il s'agit.)

ii) Soit $V = (v_n)_n$ la suite définie au **a)**. Montrer que $\|Df(V)\| = 5$.

iii) Montrer que pour tout $U \in \ell^\infty$ on a $\|Df(U)\| = \sup_n(|u_n| + |u_{n+1}|)$.

Exercice 4. [6pts] Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux evn et $L(E, F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de E dans F.

a) Rappeler la définition d'un espace de Banach.

b) Pour $f \in L(E, F)$ rappeler la définition de la norme $\|f\|_{L(E,F)}$.

Le but de l'exercice est de montrer que si $(F, \| \|_F)$ est un espace de Banach alors $(L(E, F), \| \|_{L(E,F)})$ aussi. On supposera donc dans toute la suite que $(F, \| \|_F)$ est un Banach. Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(L(E, F), \| \|_{L(E,F)})$.

c) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geq N, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

d) En déduire que pour tout $x \in E$ la suite $(f_n(x))_n$ converge dans F. On note $f(x) \in F$ sa limite.

e) Soit f la fonction de E dans F qui à x associe la limite $f(x)$ obtenue à la question précédente. Montrer que la fonction f définie une application linéaire de E dans F.

f) En utilisant les questions c) et d), montrer soigneusement que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E.$$

g) En déduire que $f \in L(E, F)$ et que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon.$$

h) Conclure.

Exercice 5. [4pts] Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = xy + \sin(x + y)$.

a) Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ détermine implicitement une fonction $y = \varphi(x)$ de classe C^∞.

b) Donner le développement limité de φ à l'ordre 2 en $x_0 = 0$.

c) Donner l'équation de la tangente T à la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ au point $(0, 0)$. C est-elle au dessus ou au dessous de T au voisinage de $(0, 0)$? Justifiez votre réponse.