L3 Mathématiques
20 Juin 2016

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique - Session 2

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barème suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : 7+6+7=20.

Exercice 1. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ de classe C^4. On notera $\mathbb{R}_3[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

a) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(0), P''(0), P(2))$ est un isomorphisme.

b) En déduire qu'il existe un unique polynôme $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que

$$P_f(0) = f(0), \quad P_f'(0) = f'(0), \quad P_f''(0) = f''(0) \quad \text{et} \quad P_f(2) = f(2).$$

c) Soit $x \in]0,2[$ fixé. On définit les fonctions R, Π et F sur $[0,2]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = t^3(t-2) \quad \text{et} \quad F(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

i) Calculer $F'(0)$ et $F''(0)$.

ii) Montrer que F s'annule en 3 points distincts que l'on précisera.

iii) En déduire que F' s'annule en 3 points distincts, puis que F'' s'annule également en 3 points distincts et enfin qu'il existe $\xi \in]0,2[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.

iv) Montrer que $R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(x)$.

d) Montrer que $|\Pi(t)| \leq \frac{27}{16}$ pour tout $t \in [0,2]$. En déduire la majoration $\|f - P_f\|_\infty \leq \dfrac{9M_4}{128}$ où $M_4 = \max\limits_{t\in[0,2]} |f^{(4)}(t)|$.

e) Montrer que $\|f - P_f\|_1 \leq \dfrac{M_4}{15}$.

f) On prend la fonction $f(x) = x^4$.

i) Calculer le polynôme P_f.

ii) Calculer $\|f - P_f\|_\infty$ et $\|f - P_f\|_1$. Que peut-on en conclure sur les majorations obtenues au d) et au e).

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 2xy$.

a) Montrer que f possède un unique point critique et déterminer sa nature (minimum local, maximum local ou point selle).

Soient $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 + y^2 \leq 3\}$ et $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 + y^2 = 3\}$.

b) Montrer que f admet un minimum et un maximum global sur D.

c) En utilisant le résultat de la question a), justifier que ces extrema sont atteints sur l'ensemble Γ.

d) Enoncer le théorème des extremas liés.

e) Déterminer le minimum et le maximum global de f sur Γ (et donc sur D).

TSVP

Exercice 3. On considère l'espace $E = C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(f) = \int_0^1 \sin(xf(x))\,\mathrm{d}x.$$

a) Montrer que pour tous a et t dans $\mathbb{R}$ on a

$$|\sin(a+t) - \sin(a) - t\cos(a)| \leq \frac{t^2}{2}.$$

b) Soit $f \in E$. Montrer que φ est différentiable en f de différentielle l'application

$$L : h \mapsto L(h) = \int_0^1 xh(x)\cos(xf(x))\,\mathrm{d}x.$$

c) Montrer que φ est de classe C^1. Indication: on pourra appliquer l'inégalité des accroissements finis à la fonction $\cos$.