L3 Mathématiques
2 Mai 2016

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 4h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre <u>indicatif</u> : 2+4+5+3+6=20.

Exercice 1. Déterminer P le polynôme d'interpolation de Lagrange aux points d'abscisses $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$ de la fonction $f(x) = \cos(x)$. Tracer le graphe de P.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

où $y_0 \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2 telle que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée.

a) Montrer qu'il existe $C \geq 0$ tel que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C|y_1 - y_2|, \qquad \forall t, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Justifier qu'il existe une unique solution maximale à l'équation différentielle. Sur quel intervalle cette solution est-elle définie? Justifier.

Etant donné $T > 0$ on considère le schéma numérique

$$y_{n+1} = y_n + \alpha h f(t_n, y_n) + \beta h f\left(t_n + \lambda h, y_n + \lambda h f(t_n, y_n)\right), \quad n = 0, \dots, N-1,$$

où $\lambda \in]0, 1]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sont des paramètres, $h = \frac{T}{N}$, et $t_n = nh$, $n = 0, \dots, N$.

c) Déterminer la fonction ϕ définissant le schéma sous la forme $y_{n+1} = y_n + h\phi(t_n, y_n, h)$.

d) Montrer que le schéma est stable pour tout choix des paramètres α, β, λ.

e) Montrer que le schéma est consistant si et seulement si $\alpha + \beta = 1$.

f) Déterminer α et β en fonction de λ pour que le schéma soit d'ordre au moins 2. Quel schéma reconnaissez vous si on prend $\alpha = 0$?

Exercice 3. Soit $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x > 0,\ y > 0\ z > 0\}$ et $f : U \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = xyz + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$.

a) Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur U.

b) Montrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0, z_0) que l'on déterminera.

c) Etudier la nature de ce point critique: est-ce un minimum local? un maximum local?

TSVP

On pose $K = \left[\frac{1}{4}, 64\right]^3$.
d) Montrer que si $(x,y,z) \notin K$ on a $f(x,y,z) > f(1,1,1)$. On pourra distinguer selon deux cas: soit x, y et z sont tous les trois supérieurs à $\frac{1}{4}$, soit l'une des trois coordonnées au moins et inférieure à $\frac{1}{4}$.
e) Montrer que f possède un minimum global sur U et le déterminer. f possède-t-elle un maximum global? Jusitifiez.

Exercice 4.
a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ telle que $f'(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
i) Démontrer, uniquement à l'aide du Théorème des accroissements finis, qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
ii) Démontrer, en utilisant uniquement l'inégalité des accroissements finis appliqué à une fonction g bien choisie, qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) Soit E un espace vectoriel normé et $f : E \to E$ une fonction différentiable. On suppose qu'il existe $L \in L(E)$ telle que $Df(x) = L$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe $y_0 \in E$ tel que $f(x) = L(x) + y_0$ pour tout $x \in E$.

Exercice 5. On considère l'espace vectoriel $\ell^1 = \{u = (u_n)_n \mid \sum |u_n| \text{ converge}\}$ muni de la norme $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Si $k \in \mathbb{N}$ on notera $\delta^{(k)}$ l'élément de ℓ^1 vérifiant $\delta_n^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Partie I. Soit $a = (a_n)_n$ une suite bornée. On note $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$.
a) Montrer que pour tout $u \in \ell^1$ la série $\sum a_n u_n$ converge.
Soit $\varphi_a : \ell^1 \to \mathbb{R}$ l'application définie par, si $u = (u_n)_n \in \ell^1$, $\varphi_a(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$. La question a) assure que φ_a est bien définie.
b) Dans cette question uniquement on prend a la suite de terme général $a_n = (-1)^n$ et u celle de terme général $u_n = \frac{1}{2^n}$. Justifier que $u \in \ell^1$ et calculer $\varphi_a(u)$.
c) Montrer que φ_a est une application linéaire continue et que $|||\varphi_a||| \leq \|a\|_\infty$.
d) i) Calculer $\varphi(\delta^{(2)})$ puis $\varphi(\delta^{(k)})$ pour $k \in \mathbb{N}$.
ii) En déduire que $|||\varphi_a||| = \|a\|_\infty$ quelque soit la suite a.

Partie II. Soit $\varphi : \ell^1 \to \mathbb{R}$ une application linéaire continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $a_n = \varphi(\delta^{(n)})$.
a) Montrer que la suite $a = (a_n)_n$ est bornée et vérifie $\|a\|_\infty \leq |||\varphi|||$.
On va montrer que $\varphi = \varphi_a$ où φ_a est définie comme dans la partie I, autrement dit que pour tout $u \in \ell^1$ on a $\varphi(u) = \varphi_a(u)$. Soit $u \in \ell^1$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on note $u^{(N)}$ la suite définie par

$$u_n^{(N)} = \begin{cases} u_n & \text{si } n \leq N, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

b) Exprimer $u^{(N)}$ à l'aide de la famille $\{\delta^{(k)},\ k \in \mathbb{N}\}$.
c) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(u^{(N)}) = \varphi_a(u^{(N)})$.
d) Montrer que $\|u - u^{(N)}\|_1 \to 0$ lorsque $N \to \infty$. En déduire que $\varphi(u) = \varphi_a(u)$.