L3 Mathématiques
26 Juin 2015

Examen de seconde session de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême suivant est donné à titre indicatif : 6+5+6+3=20.

Exercice 1. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P_f(-1) = f(-1), \quad P_f'(-1) = f'(-1), \quad P_f(1) = f(1) \quad \text{et} \quad P_f'(1) = f'(1).$$

b) Soit $x \in]-1,1[$ fixé. On définit les fonctions R, Π et F sur $[-1,1]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = (1-t)^2(1+t)^2 \quad \text{et} \quad F(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

- $i)$ Que valent $F'(-1)$ et $F'(1)$?
- $ii)$ Montrer que F s'annule en 3 points distincts que l'on précisera.
- $iii)$ En déduire que F' s'annule en 4 points distincts puis qu'il existe $\xi \in]-1,1[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.
- $iv)$ Montrer que $R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(x)$.
- $v)$ Montrer que $|\Pi(t)| \leq 1$ pour tout $t \in [-1,1]$.

c) En déduire la majoration $\|f - P_f\|_\infty \leq \frac{1}{24}\|f^{(4)}\|_\infty$.

d) On prend la fonction $f(x) = x^5$.

- $i)$ Calculer le polynôme P_f.
- $ii)$ Calculer $\|f - P_f\|_\infty$ et comparer avec la majoration obtenue au c).

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P \in E$ on pose

$$N_1(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sup_{t\in[1,2]} |P(t)|.$$

On considère l'application $\phi : E \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(P) = P(0)$. On munit $\mathbb{R}$ de la valeur absolue.

a) Montrer que N_1 et N_2 définissent des normes sur E.

b) Montrer que ϕ est continue pour la norme N_1 et calculer sa norme $|||\phi|||$.

c) Montrer que ϕ n'est pas continue pour la norme N_2. Indication: considérer les polynômes $P_n(X) = \left(1 - \dfrac{X}{2}\right)^n$.

d) Soit $F = \{P \in E \,|\, P(0) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé pour N_1. Montrer qu'il n'est pas fermé pour N_2. Indication: considérer les polynômes $1 - P_n$.

e) Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes? Justifiez.

TSVP

Exercice 3. Soit $E = M_2(\mathbb{R})$ l'espace des matrices 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. On munit E d'une norme matricielle. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = A^2$.

a) Rappeler la définition de la différentiabilité d'une fonction.

b) Montrer que f est différentiable sur E et donner sa différentielle $Df(A)$ en un point $A \in E$.

c) Montrer que f est de classe C^1.

d) Soit $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ une matrice diagonale et $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$. Calculer explicitement $Df(A)(H)$.

e) En déduire que $Df(A)$ est inversible si et seulement si α, β et $\alpha + \beta$ sont tous les trois non nuls. Donner alors l'expression de son inverse.

f) Montrer que pour toute matrice B dans un voisinage de $B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ il existe une matrice A telle que $A^2 = B$. Indication: penser au théorème d'inversion locale.

Exercice 4. Soient f et g définies par $f(x, y) = -x^2y + \frac{1}{2}y^2 + y$ et $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On note $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$.

a) Justifier que f possède un minimum global et un maximum global sur Γ.

b) Déterminer le minimum et le maximum de f sur Γ. (On pourra être amené à résoudre un système ayant 6 solutions.)