Calcul Différentiel et Analyse Numérique (L3)

Contrôle terminal du 22 avril 2022, durée : 3 heures

Les téléphones portables et les autres objets connectés doivent être éteints
Les notes de cours et autres documents ne sont pas autorisés
Une rédaction courte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1. (3 points)

1. Donner la définition d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un point. Donner la définition de la différentiabilité de f en x_0.

Exercice 2. (3 points) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^d$, $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois continûment différentiable et $a \in \mathbb{R}^d$ un point tel que

$$f(a) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = 0 \quad \text{pour tous } i, j \in [\![1, d]\!].$$

Montrer qu'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - L(x-a)|}{\|x-a\|^2} = 0. \tag{1}$$

Exercice 3. (3 points) Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pour } (x,y) = (0,0), \\ \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{pour } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

est différentiable dans toutes les directions en $(0,0)$, mais pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4. (6 points) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \int_0^{x+y} \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \quad g(x,y) = \int_0^{xy} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f et g sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et calculer leurs différentielles.
2. On définit la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

   $$F(x,y) = \big(f(x,y), g(x,y)\big).$$

   On munit $\mathbb{R}^2$ d'une norme. Montrer que F est lipschitzienne sur le carré $B = [-1,1] \times [-1,1]$.

   Indication: on pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

Tournez la page SVP

3. En supposant que $\varphi(0) \neq 0$ et $\varphi(1) \neq 0$, montrer que F est un difféomorphisme local au point $(0,1)$.

4. En supposant que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que la restriction de F à $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < x < y\}$ est un difféomorphisme de D sur $F(D)$.

Exercice 5. (4 points) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Montrer qu'il existe $C > 0$ qui ne dépend pas de f et de l'intervalle $[a,b]$ tel que

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big) \right| \leq C(b-a)^3 \max_{c\in[a,b]} |f''(c)|. \tag{2}$$

Exercice 6. (6 points) Soient a et b deux vecteurs distincts de $\mathbb{R}^3$, et soit

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x-a|^2|x-b|^2,$$

où $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

2. Calculer la différentielle et la différentielle seconde de f.

3. Trouver tous les points critiques de f, c'est-à-dire les vecteurs $x \in \mathbb{R}^3$ tels que $Df(x) = 0$.

4. Trouver tous les points critiques où la différentielle seconde est définie positive.