Calcul Différentiel et Analyse Numérique (L3)

Contrôle terminal du 6 mai 2021, durée : 3 heures

Les téléphones portables doivent être éteints
Les notes de cours et autres documents ne sont pas autorisés
Une rédaction courte et propre est demandée pour une note maximale

Exercice 1. (2 points) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 des variables $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par $g(x) = x^2 \cos x$. Exprimer la dérivée de la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = f(x, x, g(x))$ en termes des dérivées partielles de f.

Exercice 2. (2 points) Soit $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ des réels donnés et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Donner la définition du polynôme d'interpolation de Lagrange de f associé à $A = \{x_0, \ldots, x_n\}$.
2. En supposant que $n \geq 2$, trouver le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à A pour la fonction

$$f(x) = 2x^2 + 29 + \sqrt{x^2 + 1} \prod_{j=0}^{n} (x - x_j). \tag{1}$$

Exercice 3. (4 points) Soit $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$ et $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire.

1. Donner la définition de la norme matricielle de A associée à la norme $|\cdot|$. On note cette norme $\|\cdot\|$.
2. Montrer que si $B : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une autre application linéaire, alors $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.
3. Montrer que A est inversible si et seulement si il existe $c > 0$ tel que $|Ax| \geq c|x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Exercice 4. (4 points) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par les formules $f(x) = x^5 \sin(x^{-1})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Trouver l'entier maximal $k \geq 0$ tel que f soit k fois continûment differentiable sur $\mathbb{R}$.
2. Écrire le développement limité à l'ordre k au point $x = 0$ pour la fonction f.

Tournez la page SVP

Exercice 5. (6 points) Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f'(x) \neq g'(y)$. On définit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par la formule $F(x, y) := (x + y, f(x) + g(y))$.

1. Montrer que F est une fonction de classe C^1.
2. Montrer que la fonction F est injective.
3. Montrer que la fonction F définit est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Exercice 6. (4 points) Rappelons qu'étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on dit que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un *minimum global* si $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par la formule $f(x) = (x^4 - x + 1)^2$.

1. Montrer que f possède au moins un minimum global.
2. Trouver tous les minima globaux de f.

Corrigé du contrôle terminal du 6 mai 2021

1. En utilisant la formule pour la dérivée d'une fonction composée, on obtient

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + (2x\cos x - x^2 \sin x)\frac{\partial f}{\partial x_3},$$

où les dérivées partielles de f sont prises au point $(x, x, h(x))$. (2 points) $\square$

2. Le polynôme de Lagrange de f associé aux points $x_0, \dots, x_n$ est défini comme l'unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(x_i) = f(x_i)$ pour $0 \leq i \leq n$ (1 point). Dans le cas de la fonction (1), on obtient les conditions

$$P(x_i) = 2x_i^2 + 29, \quad 0 \leq i \leq n. \tag{2}$$

Comme $n \geq 2$, l'unique polynôme de degré $\leq n$ vérifiant (2) est $P(x) = 2x^2 + 29$ (1 point). $\square$

3. **1.** La norme matricielle est définie par

$$\|A\| = \sup_{|x|\leq 1} |Ax|. \quad \text{(1 point)}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|ABx| \leq \|A\|\,|Bx| \leq \|A\|\,\|B\|\,|x|,$$

d'où on obtient l'inégalité cherchée. (1 point)

3. Si A est inversible, alors $A^{-1} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est continu. Par conséquent, il existe $C > 0$ tel que

$$|A^{-1}y| \leq C|y| \quad \text{pour } y \in \mathbb{R}^d.$$

En prenant $y = Ax$, on obtient l'inégalité requise avec $c = C^{-1}$. (1 point)

Supposons maintenant que $|Ax| \geq c|x|$. Alors le noyau de A est trivial, d'où on conclut que le déterminant de la matrice de A dans la base standard est non nul. Il s'ensuit que A est inversible. (1 point) $\square$

4. La fonction f est infiniment différentiable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, et ses deux premières dérivées sont données par

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 \sin(x^{-1}) - x^3 \cos(x^{-1}), \\ f''(x) &= 20x^3 \sin(x^{-1}) - 8x^2 \cos(x^{-1}) - x \sin(x^{-1}). \quad \text{(1 point)} \end{aligned}$$

De plus, $f'(0) = f''(0) = 0$ et f'' est continu sur $\mathbb{R}$ (1 point). D'autre part, f'' n'est pas dérivable en zéro, d'où on conclut que $k = 2$ (1 point). Le développement limité à l'ordre 2 est donnée par

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2) = o(x^2). \quad \text{(1 point)}$$

$\square$

5. **1.** Les dérivées partielles de $F = (F_1, F_2)$ existent et sont données par les formules

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = f'(x), \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = g'(y). \quad (1 \text{ point})$$

Comme ce sont des fonctions continues, en utilisant un théorème du cours on conclut que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ (1 point).

2. Il faut montrer que si $F(P_1) = F(P_2)$, alors $P_1 = P_2$. Supposons que des points $P_i = (x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$ vérifient cette égalité. Alors

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2, \quad f(x_1) + g(y_1) = f(x_2) + g(y_2). \tag{3}$$

La deuxième égalité implique que

$$f(x_1) - f(x_2) = g(y_2) - g(y_1).$$

Par le théorème des accroissements finis,

$$f'(\xi)(x_1 - x_2) = g'(\eta)(y_2 - y_1). \quad (1 \text{ point}) \tag{4}$$

D'après la première égalité dans (3), on a $x_1 - x_2 = y_2 - y_1 =: \delta$. Si $\delta \neq 0$, alors on peut simplifier dans (4) par δ et conclure que $f'(\xi) = g'(\eta)$. Cette égalité contredit l'hypothèse de l'exercice. On voit que $\delta = 0$ et donc $P_1 = P_2$. (1 point)

3. D'après le théorème d'inversion locale, il suffit de montrer que la différentielle de F est inversible en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ (1 point). On a

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ f'(x) & f'(y) \end{pmatrix}$$

Le déterminant est égal à $f'(y) - f'(x)$. D'après l'hypothèse, cette quantité est différente de zéro. (1 point) □

6. Le fonction f est différentiable sur $\mathbb{R}$ et tend vers l'infini quand $|x| \to +\infty$ (1 point). Par conséquent, elle possède au moins un minimum global (1 point). Comme $f'(x) = 2(x^4 - x + 1)(4x^3 - 1)$ ne s'annule qu'au point $x = 4^{-1/3}$, c'est l'unique minimum global de f. (2 points) □