L3 Mathématiques
25 juin 2019

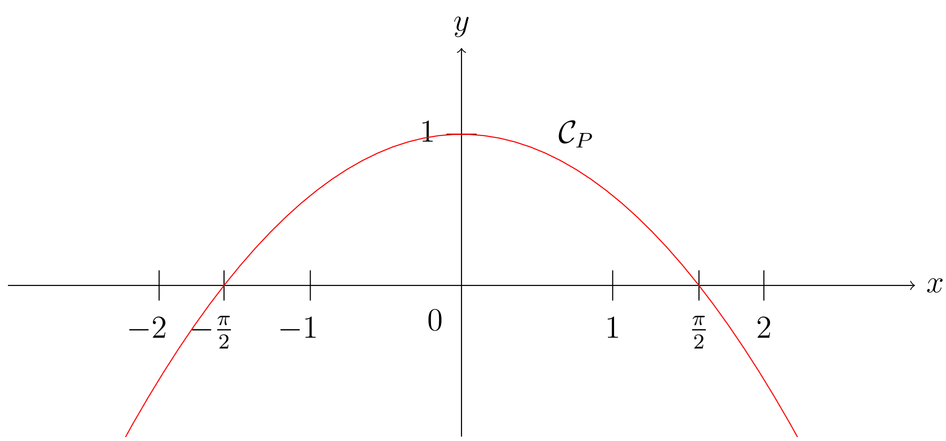
Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique - Session 2

Exercice 1. [3pts] *Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$. Déterminer P, polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points d'abscisses $x = -\dfrac{\pi}{2}$, $x = 0$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$. Tracer le graphe de P.*

P est l'unique polynôme de degré au plus 2 tel que $P(\pm\frac{\pi}{2}) = f(\pm\frac{\pi}{2})$ et $P(0) = f(0)$. Comme $f(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ sont racines de P et comme $d^\circ P \leq 2$ nécessairement P est de la forme $P(X) = \alpha(X - \frac{\pi}{2})(X + \frac{\pi}{2})$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Puisque $f(0) = 1$ on en déduit que $1 = -\alpha\dfrac{\pi^2}{4}$ et donc $\alpha = -\dfrac{4}{\pi^2}$. Finalement

$$P(X) = -\frac{4}{\pi^2}\left(X - \frac{\pi}{2}\right)\left(X + \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{4}{\pi^2}X^2.$$

Le graphe de P est



Exercice 2. [4pts] *On souhaite calculer une valeur approchée de $\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$. On considère pour cela l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^\alpha \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ que l'on va approcher à l'aide de la méthode du point milieu et où α est à déterminer. On rappelle que si $f \in C^2([a,b])$ l'erreur commise par la méthode du point milieu avec n sous-intervalles est majorée par $\dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.*

a) *Quelle valeur de α faut-il prendre pour que $I = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$?*

On calcule facilement
$$I \;=\; \int_0^\alpha \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x \;=\; [\ln(1+x)]_0^\alpha = \ln(1+\alpha).$$
Comme la fonction $\ln$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ on a $I = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$ si et seulement $\alpha = \frac{1}{2}$.

b) *Donner la valeur approchée $\tilde{I}$ de I obtenue par la méthode du point milieu lorsque $n = 2$, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise.*
La méthode du point milieu consiste à découper l'intervalle initial, ici $[0, \frac{1}{2}]$, en n sous-intervalles de même longeur, donc ici $[0, \frac{1}{4}]$ et $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, et sur chacun de ces sous-intervalles à approcher l'intégrale de f par l'intégrale de la fonction constante dont la valeur est celle de f au milieu du sous-intervalle correspondant. Ici cela donne comme valeur approchée $\tilde{I}$ de I
$$\tilde{I} \;=\; \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{4}f\left(\frac{3}{8}\right) \;=\; \frac{40}{99}.$$
La fonction f est bien de classe C^2 sur $[0, \frac{1}{2}]$ et on a $f''(x) \;=\; \frac{2}{(1+x)^3}$ qui est positive et décroissante. Donc $M_2 = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} |f''(x)| = \max_{x\in[0,\frac{1}{2}]} f''(x) = f''(0) = 2$, et l'erreur commise $|\tilde{I} - I|$ est ainsi inférieure à $\frac{M_2(\frac{1}{2}-0)^3}{24\times 2^2} = \frac{1}{384}$.

c) *Quelle valeur minimum de n faut-il prendre pour que l'estimation de l'erreur commise soit inférieure à 10^{-4} ? Indication : $0,408 \le \frac{1}{\sqrt{6}} \le 0,409$.*
Il suffit que $10^{-4} \;\ge\; \frac{M_2(\frac{1}{2}-0)^3}{24n^2} \;=\; \frac{1}{96n^2}$, autrement dit que $n^2 \;\ge\; \frac{10^4}{96} \iff n \;\ge\; \frac{10^2}{4\sqrt{6}}$.
L'encadrement de $\frac{1}{\sqrt{6}}$ donné dans l'énoncé entraine que la valeur minimum de n est 11.

Exercice 3. [13pts] *Soit $E = C^0([0,1])$. On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par*
$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Partie I. *On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.*

a) *Montrer que Φ est différentiable sur E de différentielle $D\Phi(f) : h \mapsto \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$.*
Etant donnée $f \in E$, pour tout $h \in E$ on a
$$\Phi(f+h) = \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x)+h(x))^2\,\mathrm{d}x \;=\; \Phi(f) + \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x.$$
L'application $L : E \to \mathbb{R}$ définie par $L(h) = \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ est linéaire (linéarité de l'intégrale). De plus pour tout $h \in E$ on a
$$(1) \qquad |L(h)| \;=\; \left|\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\le\; \int_0^1 |f(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \;\le\; \|h\|_\infty \times \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

L'application L est linéaire et on a trouvé une constante $C \geq 0$, ici $C = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$, telle que pour tout $h \in E$ on ait $|L(h)| \leq C\|h\|_\infty$. Cela prouve que L est continue.
Attention ! Ici E n'est pas de dimension finie donc la continuité de L n'est pas automatique.

Finalement pour tout $h \in E$ on a

$$\left|\frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \frac{1}{2}\int_0^1 |h(x)|^2\,\mathrm{d}x \;\leq\; \frac{1}{2}\|h\|_\infty^2,$$

donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_\infty} \times \frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x \;=\; 0$ et $\frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x \;=\; o(h)$. On a ainsi trouvé L linéaire continue telle que $\Phi(f+h) = \Phi(f) + L(h) + o(h)$ ce qui prouve que Φ est différentiable en f et que $D\Phi(f) : E \to \mathbb{R}$ est donnée par

$$D\Phi(f) : h \mapsto \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x.$$

b) *Montrer que pour tout $f \in E$ on a $|||D\Phi(f)||| \leq \|f\|_1$. On rappelle que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.*
Par définition on a $|||D\Phi(f)||| = \sup\limits_{\|h\|_\infty \leq 1} |D\Phi(f)(h)|$. L'inégalité (1) montre que pour tout $h \in E$ vérifiant $\|h\|_\infty \leq 1$ on a $|D\Phi(f)(h)| \leq \|f\|_1$, et donc $|||D\Phi(f)||| \leq \|f\|_1$.
c) *On suppose dans cette question uniquement que f est de signe constant sur $[0,1]$. Montrer que $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.*
On prend h la fonction constante égale à 1 si f est positive, et constante égale à -1 si f est négative. La fonction h est bien continue, vérifie $\|h\|_\infty = 1$, et pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x)h(x) = |f(x)|$. Ainsi pour cette fonction h on a $D\Phi(f)(h) = \|f\|_1$ et donc $|||D\Phi(f)||| \geq \|f\|_1$. Combiné avec la question précédente cela prouve que $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.

d) *On ne suppose plus que f est de signe constant. Pour tout $n \geq 1$ soit $h_n(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{\frac{1}{n} + f(x)^2}}$.*

i) *Montrer que $\|h_n\|_\infty \leq 1$.*
Si x est tel que $f(x) = 0$ on a $|h_n(x)| = 0 \leq 1$. Sinon on a $\dfrac{1}{n} + f(x)^2 \geq f(x)^2$ et donc

$$|h_n(x)| \leq \frac{|f(x)|}{\sqrt{f(x)^2}} = 1.$$

On a bien $|h_n(x)| \leq 1$ pour tout x et donc $\|h_n\|_\infty \leq 1$.

ii) *Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} D\Phi(f)(h_n) \;=\; \|f\|_1$. (On fera attention de bien justifier tout échange de limite et d'intégrale).*

Pour tout n on a $D\Phi(f)(h_n) = \int_0^1 f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x$. Soit $x \in [0,1]$. Si $f(x) \neq 0$ on a $h_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{f(x)}{\sqrt{f(x)^2}} = \dfrac{f(x)}{|f(x)|}$, et donc $f(x)h_n(x) \to |f(x)|$, tandis que si $f(x) = 0$ on a $h_n(x) = 0$ pour tout n et donc $f(x)h_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dans les deux cas $f(x)h_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} |f(x)|$, i.e. la suite de fonctions $(fh_n)_n$ converge simplement vers la fonction $|f|$. De plus pour tout n et tout $x \in [0,1]$

on a $|f(x)h_n(x)| \leq \|h_n\|_\infty |f(x)| \leq |f(x)|$ et la fonction $|f|$ est intégrable (elle est continue sur un segment). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominé et on a

$$\lim_{n\to\infty} D\Phi(f)(h_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \;=\; \|f\|_1.$$

Remarque : on peut aussi remarquer que la suite de fonctions $(fh_n)_n$ est une suite croissante de fonctions positives et on peut appliquer le théorème de convergence monotone plutôt que le théorème de convergence dominée.

iii) *En déduire que* $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.
Comme $\|h_n\|_\infty \leq 1$ pour tout n, par définition de $|||D\Phi(f)|||$ on a $|||D\Phi(f)||| \geq |D\Phi(f)(h_n)|$ pour tout n, et en passant à la limite $n \to \infty$ la question ii) assure que $|||D\Phi(f)||| \geq \|f\|_1$. Finalement, combiné à la question b) cela prouve bien que $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.

e) *Montrer que* Φ *est de classe* C^1.
Φ est de classe C^1 si et seulement si $D\Phi$ est continue. Soient $f, g \in E$. Pour tout $h \in E$ on a

$$\begin{aligned}
&D\Phi(f)(h) - D\Phi(g)(h)\\
&= \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)h(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1 (f(x)-g(x))h(x)\,\mathrm{d}x\\
&= D\Phi(f-g)(h),
\end{aligned}$$

i.e. $D\Phi(f) - D\phi(g) = D\Phi(f-g)$. Les questions b)-c) assurent donc que

$$|||D\Phi(f) - D\Phi(g)||| \;=\; |||D\Phi(f-g)||| \;=\; \|f-g\|_1 \;=\; \int_0^1 |f(x)-g(x)|\;dx \;\leq \|f-g\|_\infty.$$

Autrement dit la fonction $D\Phi$ est 1-lipschitzienne et donc continue.
Remarque : On aurait aussi pu remarquer que $D\Phi$ est en fait linéaire et comme $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ les questions b)-c) prouvent que pour tout f on a $|||D\Phi(f)||| \leq \|f\|_\infty$ et donc que $D\Phi$ est continue.

Partie II. *On munit maintenant* E *de la norme* $\|\ \|_1$.

a) *Montrer que pour tout* $f \in E$ *l'application* $L_f : E \to \mathbb{R}$ *définie par* $L_f(h) = \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ *est continue.*
Le même type de raisonnement qu'à la partie I. montre que pour tout $h \in E$ on a

$$|L_f(h)| \;=\; \left|\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right| \;\leq\; \int_0^1 |f(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \;\leq\; \|f\|_\infty \times \int_0^1 |h(x)|\,\mathrm{d}x \;=\; \|f\|_\infty \times \|h\|_1.$$

Cela prouve que L_f est continue, et que $|||L_f||| \leq \|f\|_\infty$.

b) *Montrer que cependant* Φ *n'est différentiable en aucun* $f \in E$. *Indication : considérer* $h_n(x) = \sqrt{n}x^n$.
Soient $f, h \in E$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, on a

$$\frac{1}{t}\left(\Phi(f+th) - \Phi(f)\right) = \int_0^1 f(x)h(x) + \frac{t}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x \xrightarrow{t\to 0} L_f(h),$$

i.e. Φ est dérivable en f dans la direction h et sa dérivée directionnelle est $L_f(h)$. Si Φ est différentiable en f on a donc nécessairement $D\Phi(f) = L_f$. L'application L_f est bien continue d'après la question a) donc Φ est différentiable en f si et seulement si $\Phi(f+h)-\Phi(f)-L_f(h) = o(h)$. On calcule

$$\begin{aligned}
&\Phi(f+h)-\Phi(f)-L_f(h)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (f(x)+h(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 h(x)^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Soit $h_n \in E$ définie par $h_n(x) = \sqrt{n}x^n$. On a

$$\|h_n\|_1 = \int_0^1 |h_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \sqrt{n}x^n\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que

$$\Phi(f+h_n)-\Phi(f)-L_f(h_n) = \frac{1}{2}\int_0^1 h_n(x)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 nx^{2n}\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2(2n+1)}, \tag{2}$$

et donc $\dfrac{1}{\|h_n\|_1}\left(\Phi(f+h_n)-\Phi(f)-L_f(h_n)\right) = \dfrac{n(n+1)}{2\sqrt{n}(2n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi $\Phi(f+h)-\Phi(f)-L_f(h) \neq o(h)$ et donc Φ n'est pas différentiable en f.

c) *Montrer qu'en fait Φ n'est continue en aucun $f \in E$.*

On reprend la suite de fonctions $(h_n)_n$ de la question précédente. L'équation (2) s'écrit

$$\Phi(f+h_n) = \Phi(f) + L_f(h_n) + \frac{n}{2(2n+1)}.$$

Comme $\|h_n\|_1 = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \to 0$, on a $h_n \to 0$ et puisque, d'après la question a), L_f est continue on a donc $L_f(h_n) \to L_f(0) = 0$. Ainsi $\Phi(f+h_n) \to \Phi(f) + \dfrac{1}{4} \neq \Phi(f)$ alors que $f + h_n \to f$. Cela prouve que Φ n'est pas continue en f, et ce quelque soit $f \in E$.