L3 Mathématiques
25 juin 2019

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique - Session 2

Durée: 2h. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
Tout résultat non justifié sera considéré comme faux.
Le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif.

Exercice 1. [3pts] Soit f la fonction définie par $f(x) = \cos(x)$. Déterminer P, polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points d'abscisses $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$. Tracer le graphe de P.

Exercice 2. [4pts] On souhaite calculer une valeur approchée de $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$. On considère pour cela l'intégrale $I = \int_0^\alpha \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ que l'on va approcher à l'aide de la méthode du point milieu et où α est à déterminer. On rappelle que si $f \in C^2([a,b])$ l'erreur commise par la méthode du point milieu avec n sous-intervalles est majorée par $\frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$ où $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

a) Quelle valeur de α faut-il prendre pour que $I = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$?

b) Donner la valeur approchée $\tilde{I}$ de I obtenue par la méthode du point milieu lorsque $n = 2$, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise.
c) Quelle valeur minimum de n faut-il prendre pour que l'estimation de l'erreur commise soit inférieure à 10^{-4}? Indication: $0,408 \leq \frac{1}{\sqrt{6}} \leq 0,409$.

Exercice 3. [13pts] Soit $E = C^0([0,1])$. On considère l'application $\Phi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Partie I. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$.

a) Montrer que Φ est différentiable sur E de différentielle $D\Phi(f) : h \mapsto \int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que pour tout $f \in E$ on a $|||D\Phi(f)||| \leq \|f\|_1$. On rappelle que $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

c) On suppose dans cette question uniquement que f est de signe constant sur $[0,1]$. Montrer que $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.

TSVP

d) On ne suppose plus que f est de signe constant. Pour tout $n \geq 1$ soit $h_n(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{\frac{1}{n} + f(x)^2}}$.

i) Montrer que $\|h_n\|_\infty \leq 1$.

ii) Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} D\Phi(f)(h_n) = \|f\|_1$. (On fera attention de bien justifier tout échange de limite et d'intégrale).

iii) En déduire que $|||D\Phi(f)||| = \|f\|_1$.

e) Montrer que Φ est de classe C^1.

Partie II. On munit maintenant E de la norme $\| \ \|_1$.

a) Montrer que pour tout $f \in E$ l'application $L_f : E \to \mathbb{R}$ définie par $L_f(h) = \displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x$ est continue.

b) Montrer que cependant Φ n'est différentiable en aucun $f \in E$. Indication: considérer $h_n(x) = \sqrt{n}x^n$.

c) Montrer qu'en fait Φ n'est continue en aucun $f \in E$.