L3 Mathématiques
7 Mai 2019

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 3h. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
Total des points sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1. [12pts] Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Partie I. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.*

a) *Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que*

$$P_f(0) = f(0), \quad P_f'(0) = f'(0), \quad P_f(1) = f(1) \quad \text{et} \quad P_f'(1) = f'(1).$$

On considère $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par $\Phi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$. La question posée revient à montrer que Φ est bijective.

On remarque facilement que Φ est linéaire, et comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, pour montrer que Φ est bijective il suffit de montrer qu'elle est injective (conséquence du théorème du rang). Soit donc $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. On en déduit que 0 et 1 sont tous les deux racines au moins double de P. Comme ce dernier est de degré au plus 3 on en déduit que P est nul (cf cours de L1 sur les polynômes). Finalement $\operatorname{Ker} \Phi = \{0\}$ et Φ est injective et donc bijective.

b) *Soit $x \in]0,1[$ fixé. On définit les fonctions R, Π et F sur $[0,1]$ par*

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = t^2(t-1)^2 \quad \text{et} \quad F(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

i) *Que valent $F'(0)$ et $F'(1)$?*
On a $F'(t) = R'(t)\Pi(x) - R(x)\Pi'(t)$ avec $R(t) = f(t) - P_f(t)$. Par définition de P_f on a $R'(0) = R'(1) = 0$. Par ailleurs 0 et 1 sont racines doubles de Π donc $\Pi'(0) = \Pi'(1) = 0$. On en déduit que $F'(0) = F'(1) = 0$.

ii) *Montrer que F s'annule en 3 points distincts que l'on précisera.*
Le même argument que ci-dessus permet de vérifier que $F(0) = F(1) = 0$. Par ailleurs on a de façon évidente $F(x) = 0$. Comme $x \in]0,1[$ la fonction F a bien trois racines distinctes.

iii) *En déduire que F' s'annule en 4 points distincts puis qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.*
La fonction F est de classe C^4 (car f l'est et que R et Π sont des polynômes donc C^∞).
On pourra donc essayer d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction F ainsi qu'à ses dérivées successives F', F'' et F'''.
On a $F(0) = F(x) = F(1) = 0$. On applique le théorème de Rolle à F sur chacun des intervalles $[0,x]$ et $[x,1]$. Il existe donc $0 < x_1 < x < x_2 < 1$ tels que $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$. Par ailleurs $F'(0) = F'(1) = 0$, et donc F' a 4 racines distinctes: $0 < x_1 < x_2 < 1$. On peut ensuite appliquer Rolle à F' sur chacun des intervalles $[0,x_1]$, $[x_1,x_2]$ et $[x_2,1]$. Il existe donc y_1, y_2, y_3 vérifiant

$$0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < y_3 < 1 \quad \text{et} \quad F''(y_1) = F''(y_2) = F''(y_3) = 0.$$

En particulier les y_i sont distincts. On continue de même en appliquant Rolle à F'' sur $[y_1,y_2]$ et $[y_2,y_3]$: il existe $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3$ tels que $F'''(z_1) = F'''(z_2) = 0$. Et une dernière application de Rolle à F''' sur $[z_1, z_2]$ donne le résultat.

iv) *Montrer que* $R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(x)$.

On a $0 = F^{(4)}(\xi) = R^{(4)}(\xi)\Pi(x) - \Pi^{(4)}(\xi)R(x)$. Or $\Pi(t) = t^2(t-1)^2$ est un polynôme de degré 4 donc sa dérivée quatrième est constante. Le coefficient dominant de Π étant 1 on obtient $\Pi^{(4)}(\xi) = 4!$. Par ailleurs $R^{(4)} = f^{(4)} - P_f^{(4)}$ et P_f est de degré au plus 3 donc sa dérivée quatrième est nulle et ainsi $R^{(4)} = f^{(4)}$. Finalement on a

$$0 = F^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi)\Pi(x) - 4! \times R(x) \quad \Longleftrightarrow \quad R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)\Pi(x)}{4!}.$$

c) *Calculer* $\int_0^1 |\Pi(x)|\,\mathrm{d}x$. *En déduire la majoration* $\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_4}{720}$ *où* $M_4 = \max_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)|$.

On a $\Pi(t) = t^2(t-1)^2 \geq 0$ donc

$$\int_0^1 |\Pi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(t-1)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^4 - 2t^3 + t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30}.$$

On a alors, d'après b)iv),

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_0^1 |f(x) - P_f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |R(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4!}\int_0^1 |\Pi(x)f^{(4)}(\xi)|\,\mathrm{d}x.$$

Attention!!! Le ξ dépend de x et on ne peut donc pas sortir $f^{(4)}(\xi)$ de l'intégrale. On commence par le majorer par M_4 et on a alors

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{24}\int_0^1 M_4|\Pi(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{M_4}{24}\int_0^1 |\Pi(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{M_4}{720}.$$

Partie II. *On souhaite calculer une valeur approchée de* $\ln(2)$. *On considère pour cela l'intégrale* $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ *que l'on va approcher à l'aide de la méthode des trapèzes. On rappelle que si* $f \in C^2([a,b])$ *l'erreur commise par la méthode des trapèzes avec* n *sous-intervalles est majorée par* $\frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$ *où* $M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

a) *Donner la valeur approchée de* I *obtenue par la méthode des trapèzes lorsque* $n = 3$, *ainsi qu'une majoration de l'erreur commise.*

La méthode des trapèzes consiste à découper l'intervalle initial, ici $[0,1]$, en n sous-intervalles de même longeur, donc ici $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ et $[\frac{2}{3}, 1]$, et sur chacun de ces sous-intervalles à approcher l'intégrale de f par l'intégrale de la fonction affine qui interpole f aux extrêmités du sous-intervalle correspondant. Ici cela donne comme valeur approchée $\tilde{I}$ de I

$$\tilde{I} = \frac{1}{6}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)\right) + \frac{1}{6}\left(f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right) = \frac{7}{10} = 0,7.$$

La fonction f est bien de classe C^2 sur $[0,1]$ et on a $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ qui est positive et décroissante. Donc $M_2 = \max_{x\in[0,1]} |f''(x)| = \max_{x\in[0,1]} f''(x) = f''(0) = 2$, et l'erreur commise $|\tilde{I} - I|$ est ainsi inférieure à $\dfrac{M_2(1-0)^3}{12 \times 3^2} = \dfrac{1}{54}$.

b) *Vérifier que la fonction* $f(x) = \frac{1}{1+x}$ *est convexe sur* $[0,1]$. *En déduire que pour tout entier* n *la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes est supérieure ou égale à* $\ln(2)$ *(on pourra commencer par faire un dessin), puis que* $0,68 \leq \ln(2) \leq 0,7$.

La fonction f est deux fois dérivable avec $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3} \geq 0$ sur $[0,1]$ donc f est convexe. Si on coupe $[0,1]$ en n sous-intervalles et qu'on désigne par f_k, $k = 0, \ldots, n-1$, la fonction affine qui interpole f aux points d'absisse $a_k = \frac{k}{n}$ et $a_{k+1} = \frac{k+1}{n}$, la méthode des trapèzes consiste à approcher $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ par $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)\,\mathrm{d}x$. Comme la fonction f est convexe, sur chaque $[a_k, a_{k+1}]$ son graphe est en dessous de la corde passant par les extrêmités de l'intervalle, i.e. $f(x) \leq f_k(x)$ pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$. On a donc

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leq\; \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f_k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $n = 3$ on a ainsi $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leq I = 0,7$. Par ailleurs comme $|I - \ln(2)| \leq \frac{1}{54} \leq 0,02$ on en déduit que $\ln(2) \geq I - 0,02 = 0,68$.

c) *Quelle valeur minimum de n faut-il prendre pour que l'estimation de l'erreur commise soit inférieure à 10^{-4}. Indication:* $0,408 \leq \dfrac{1}{\sqrt{6}} \leq 0,409$.

Il suffit que $10^{-4} \geq \dfrac{M_2(1-0)^3}{12n^2} = \dfrac{1}{6n^2}$, autrement dit que $n^2 \geq \dfrac{10^4}{6} \iff n \geq \dfrac{10^2}{\sqrt{6}}$. L'encadrement de $\frac{1}{\sqrt{6}}$ donné dans l'énoncé entraine que la valeur minimum de n est 41.

Partie III. *On souhaite maintenant calculer une valeur approchée de* $\ln(2)$ *en utilisant le résultat de la partie I.*

a) *Déterminer le polynôme P_f associé à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.*

Le polynôme P_f est de degré au plus 3 donc de la forme $P_f(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ et on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_f(0) &=& f(0) \\ P_f'(0) &=& f'(0) \\ P_f(1) &=& f(1) \\ P_f'(1) &=& f'(1) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} d &=& 1 \\ c &=& -1 \\ a+b+c+d &=& \frac{1}{2} \\ 3a+2b+c &=& -\frac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} d &=& 1 \\ c &=& -1 \\ a+b &=& \frac{1}{2} \\ 3a+2b &=& \frac{3}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} d &=& 1 \\ c &=& -1 \\ a &=& -\frac{1}{4} \\ b &=& \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Ainsi $P_f(X) = -\dfrac{1}{4}X^3 + \dfrac{3}{4}X^2 - X + 1$.

b) *Calculer $J = \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire un nouvel encadrement de* $\ln(2)$.

On calcule facilement $J = \frac{11}{16} = 0,6875$. La fonction f est de classe C^4 avec $f^{(4)}(x) = \dfrac{24}{(1+x)^5}$ et donc $M_4 = \displaystyle\max_{x\in[0,1]} |f^{(4)}(x)| = 24$. La question c) de la Partie I assure que

$$|\ln(2) - J| \leq \frac{1}{720} \times \max_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)| = \frac{1}{30} \Leftrightarrow J - \frac{1}{30} \leq \ln(2) \leq J + \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{157}{240} \leq \ln(2) \leq \frac{173}{240}.$$

Exercice 2. [4pts] *On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Si $P \in E$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \displaystyle\max_{k=0,\ldots,n} |a_k|$ et $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{3^k}$, i.e. $\varphi(P) = P\left(\frac{1}{3}\right)$. On admettra que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.*

Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue et calculer $|||\varphi|||$.

On vérifie facilement que φ est linéaire. En effet pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P, Q \in E$ on a

$$\varphi(P+\lambda Q) = (P+\lambda Q)\left(\frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{3}\right) + \lambda Q\left(\frac{1}{3}\right) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q).$$

Comme φ est linéaire, elle est continue si et seulement s'il existe $C \geq 0$ tel que $|\varphi(P)| \leq C\|P\|$ pour tout $P \in E$. Si $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a

$$|\varphi(P)| \;=\; \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{3^k}\right| \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{|a_k|}{3^k} \;\leq\; \|P\| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} \;=\|P\| \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} \;=\; \frac{3}{2}\|P\|.$$

Cela prouve que φ est bien continue. Par ailleurs, par définition, $|||\varphi||| = \displaystyle\sup_{P\in E,\,\|P\|=1} |\varphi(P)|$ donc le calcul ci-dessus montre que $|||\varphi||| \leq \dfrac{3}{2}$. Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X^k$ on a $\|P_n\| = 1$ et $|\varphi(P_n)| = \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$. On en déduit que $|||\varphi||| \geq \dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}$. En faisant tendre n vers l'infini on obtient $|||\varphi||| \geq \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$, et donc finalement $|||\varphi||| = \dfrac{3}{2}$.

Exercice 3. [7pts] *On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle, i.e. telle que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ on a $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère la fonction $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = 2M - MAM$.*

a) *Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.*

Etant donné $M \in M_n(\mathbb{R})$, pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$f(M+H) = 2(M+H) - (M+H)A(M+H) = f(M) + 2H - MAH - HAM - HAH.$$

L'application $L : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $L(H) = 2H - MAH - HAM$ est linéaire, et comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie elle est continue. Enfin pour tout H on a $\|-HAH\| \leq \|A\| \times \|H\|^2$ donc $\displaystyle\lim_{H\to 0} \frac{\|-HAH\|}{\|H\|} = 0$, i.e. $-HAH = o(H)$. On a ainsi trouvé L linéaire continue telle que $f(M+H) = f(M) + L(H) + o(H)$ ce qui prouve que f est différentiable en M et que $Df(M) : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ est donnée par

$$Df(M) : H \mapsto 2H - MAH - HAM.$$

b) *Montrer que f est de classe C^1.*

Par définition f est de classe C^1 si Df est continue. Pour tous $M, N \in M_n(\mathbb{R})$ on a

$$\begin{aligned}
|||Df(M) - Df(N)||| &= \sup_{H\in M_n(\mathbb{R}),\,\|H\|=1} \|Df(M)(H) - Df(N)(H)\| \\
&= \sup_{H\in M_n(\mathbb{R}),\,\|H\|=1} \|-MAH - HAM + NAH + HAN\| \\
&\leq \sup_{H\in M_n(\mathbb{R}),\,\|H\|=1} (\|(N-M)AH\| + \|HA(N-M)\|) \\
&\leq \sup_{H\in M_n(\mathbb{R}),\,\|H\|=1} 2\|N-M\| \times \|A\| \times \|H\| \\
&= 2\|N-M\| \times \|A\|.
\end{aligned}$$

Cela prouve que Df est $2\|A\|$-Lipschitzienne et donc en particulier continue. La fonction f est donc bien C^1.

c) *Calculer $Df(A^{-1})$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $M \in B(A^{-1}, \delta)$, la boule fermée de centre A^{-1} et de rayon δ, on a $|||Df(M)||| \leq \frac{1}{2}$.*
D'après a) on a $Df(A^{-1}) : H \mapsto 2H - A^{-1}AH - HAA^{-1} = 0$, i.e. $Df(A^{-1}) = 0$. Autrement dit A^{-1} est point critique de f. Comme f est C^1, Df est continue. En particulier Df est continue en A^{-1} donc il existe $\delta > 0$ tel que si $\|M - A^{-1}\| \leq \delta$ on a $|||Df(M) - Df(A^{-1})||| \leq \dfrac{1}{2}$, i.e. $M \in B(A^{-1}, \delta) \Rightarrow |||Df(M)||| \leq \frac{1}{2}$.

d) *Calculer $f(A^{-1})$. Montrer que pour tout $M \in B(A^{-1}, \delta)$ on a $f(M) \in B(A^{-1}, \delta)$. Indication: accroissements finis.*
On a $f(A^{-1}) = A^{-1}$. L'inégalité des accroissements finis assure que, pour tout $M \in B(A^{-1}, \delta)$,

$$\|f(M)-A^{-1}\| = \|f(M)-f(A^{-1})\| \leq \sup_{N\in[A^{-1},M]} |||Df(N)|||\times\|M-A^{-1}\| \leq \sup_{N\in[A^{-1},M]} |||Df(N)|||\times\delta,$$

où $[A^{-1}, M] = \{(1-t)A^{-1} + tM,\ t \in [0, 1]\}$. Or, si $N = (1-t)A^{-1} + tM \in [A^{-1}, M]$ on a

$$\|N - A^{-1}\| = \|t(M - A^{-1})\| \leq \|M - A^{-1}\| \leq \delta,$$

i.e. $[A^{-1}, M] \subset B(A^{-1}, \delta)$ et donc $|||Df(N)||| \leq \frac{1}{2}$. Finalement si $M \in B(A^{-1}, \delta)$ on a $\|f(M) - A^{-1}\| \leq \dfrac{\delta}{2} \leq \delta$ et donc $f(M) \in B(A^{-1}, \delta)$.

e) *La question précédente assure que $f : B(A^{-1}, \delta) \to B(A^{-1}, \delta)$. Montrer que f est contractante sur $B(A^{-1}, \delta)$.*
Toujours à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, pour tous $M, M' \in B(A^{-1}, \delta)$ on a

$$\|f(M) - f(M')\| \leq \sup_{N\in[M,M']} |||Df(N)||| \times \|M - M'\|.$$

Or, si $N = (1-t)M + tM' \in [M, M']$, $t \in [0, 1]$, on a

$$\|N-A^{-1}\| = \|(1-t)(M-A^{-1})+t(M'-A^{-1})\| \leq (1-t)\|M-A^{-1}\|+t\|M'-A^{-1}\| \leq (1-t)\delta+t\delta = \delta,$$

c'est-à-dire $N \in B(A^{-1}, \delta)$ et donc $|||Df(N)||| \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tous $M, M' \in B(A^{-1}, \delta)$ on a $\|f(M) - f(M')\| \leq \dfrac{1}{2}\|M - M'\|$, i.e. f est contractante de rapport $\frac{1}{2}$.
Remarque: lorsqu'on montre que si $N \in [M, M']$ on a $N \in B(A^{-1}, \delta)$ on redémontre en fait que $B(A^{-1}, \delta)$ est convexe.

f) *En déduire que si $M_0 \in B(A^{-1}, \delta)$ et $(M_k)_k$ est la suite définie par récurrence par $M_{k+1} = f(M_k)$ alors la suite $(M_k)_k$ converge vers A^{-1}.*
Comme $f : B(A^{-1}, \delta) \to B(A^{-1}, \delta)$ on a $M_k \in B(A^{-1}, \delta)$ pour tout k, et comme f est $\frac{1}{2}$-contractante on a

$$\|M_{k+1} - A^{-1}\| = \|f(M_k) - f(A^{-1})\| \leq \frac{1}{2}\|M_k - A^{-1}\|, \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

et on montre facilement par récurrence que $\|M_k - A^{-1}\| \leq 2^{-k}\|M_0 - A^{-1}\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit donc que $\|M_k - A^{-1}\| \to 0$, i.e. $(M_k)_k$ converge vers A^{-1}.

Exercice 4. [7pts] *Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right).$$

Le but de l'exercice est d'étudier les extrema de f.
a) *Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.*
La fonction f est produit et composée de fonctions polynômes et de la fonction exponentielle qui sont toutes de classe C^2 (et même C^∞) donc f est de classe C^2.

Attention Les fonctions polynômes sont définies et C^∞ sur $\mathbb{R}^3$ mais la fonction exponentielle est définie et C^∞ sur $\mathbb{R}$. On compose ici $g(x,y,z) = -\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$ qui va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ et $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) *Montrer que f admet exactement deux points critiques:* $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *et* $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$. *Indication: on pourra commencer par remarquer, en le justifiant correctement, que si (x,y,z) est point critique alors $z = y = 2x$.*

Le point (x,y,z) est point critique si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 0$.

En notant $g(x,y,z) = -\dfrac{x^2+y^2+z^2}{2}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= (1 - x(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= (2 - y(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= (2 - z(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)).
\end{aligned}$$

Puisque $\exp(g(x,y,z)) \neq 0$ on en déduit que (x,y,z) est point critique si et seulement si

$$x(x+2y+2z) = 1,\ y(x+2y+2z) = 2,\ z(x+2y+2z) = 2.$$

On remarque alors que $x+2y+2z$ ne peut pas s'annuler et donc que $y = z = 2x = \dfrac{2}{x+2y+2z}$. En remplaçant y et z par $2x$ dans la premire équation on obtient $9x^2 = 1$ et donc $x = \pm\frac{1}{3}$, $y = z = 2x$. On obtient ainsi que les seules points critiques possibles sont $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, et on vérifie qu'ils le sont bien.

c) *Etudier la nature de chacun des deux points critiques.*

Pour étudier la nature des points critiques on commence par déterminer la différentielle seconde de f en chacun de ces points. On calcule pour cela les dérivées partielles d'ordre 2 de f. On obtient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \big(-3x - 2y - 2z + x^2(x+2y+2z)\big)\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \big(-x - 6y - 2z + y^2(x+2y+2z)\big)\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \big(-x - 2y - 6z + z^2(x+2y+2z)\big)\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= (-2x - y + xy(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= (-2x - z + xz(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &= (-2y - 2z + yz(x+2y+2z))\exp(g(x,y,z)).
\end{aligned}$$

La forme quadratique Q associée à la différentielle seconde de f en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ est donc, si $(h, k, \ell) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} Q(h,k,\ell) &= \mathrm{e}^{-1/2}\left(-\frac{10}{3}h^2 - \frac{4}{3}hk - \frac{4}{3}h\ell - \frac{13}{3}k^2 - \frac{4}{3}k\ell - \frac{13}{3}\ell^2\right) \\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-1/2}}{3}\left(9(h^2+k^2+\ell^2) + (h+2k+2\ell)^2\right). \end{aligned}$$

On voit ainsi que $Q(h,k,\ell) \leq 0$ et que $Q(h,k,\ell) = 0$ si et seulement si $h = k = \ell = h+2k+2\ell = 0$, i.e. $(h,k,\ell) = (0,0,0)$. Ainsi la différentielle seconde de f en $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ est définie négative et on a donc un maximum local en ce point.

Un raisonnement similaire montre qu'en $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$ la différentielle seconde de f est définie positive et donc qu'on a un minimum local en ce point.

On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|(x,y,z)\| = \max(|x|,|y|,|z|)$.

d) *Montrer que pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ on a $|f(x,y,z)| \leq 5\|(x,y,z)\|\,\mathrm{e}^{-\frac{\|(x,y,z)\|^2}{2}}$.*

Pour tout (x,y,z) on a d'une part $|x+2y+2z| \leq |x| + 2|y| + 2|z| \leq 5\|(x,y,z)\|$ et d'autre part $x^2+y^2+z^2 \geq \max(x^2,y^2,z^2) = \|(x,y,z)\|^2$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante on en déduit le résultat.

e) *En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout (x,y,z) vérifiant $\|(x,y,z)\| > R$ on a $|f(x,y,z)| < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.*

La fonction positive $\varphi(t) = 5t\mathrm{e}^{-t^2/2}$ définie sur $[0, +\infty[$ vérifie $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = 0$. Comme $\varepsilon = \mathrm{e}^{-1/2} > 0$ il existe $R > 0$ tel que pour tout $t > R$ on ait $0 \leq \varphi(t) < \mathrm{e}^{-1/2}$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, si $\|(x,y,z)\| > R$ on a donc d'après la question d)

$$|f(x,y,z)| \leq \varphi\left(\|(x,y,z)\|\right) < \mathrm{e}^{-1/2}.$$

f) *Montrer que f admet un minimum global et un maximum global et les déterminer.*

Soit $K = \overline{B}(0,R)$ la boule fermée de $\mathbb{R}^3$ de centre 0 et de rayon R. C'est un ensemble fermé et borné, et puisque $\mathbb{R}^3$ est de dimension finie c'est donc un compact. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^3$, donc en particulier sur le compact K. Ainsi f admet un minimum et un maximum sur K: il existe (x_m, y_m, z_m) et (x_M, y_M, z_M) dans K tels que pour tous $(x,y,z) \in K$ on ait

$$f(x_m,y_m,z_m) \leq f(x,y,z) \leq f(x_M,y_M,z_M). \tag{1}$$

Puisque $f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = 3\,\mathrm{e}^{-1/2}$ et $f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3\,\mathrm{e}^{-1/2}$, d'après la question e) les points $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ sont dans K et on a donc

$$f(x_m,y_m,z_m) \leq f\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -3\,\mathrm{e}^{-1/2} \text{ et } 3\,\mathrm{e}^{-1/2} = f\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \leq f(x_M,y_M,z_M).$$

Ainsi si $(x,y,z) \notin K$ on a d'après la question e)

$$f(x_m,y_m,z_m) \leq -3\,\mathrm{e}^{-1/2} < -\mathrm{e}^{-1/2} < f(x,y,z) < \mathrm{e}^{-1/2} < 3\,\mathrm{e}^{-1/2} \leq f(x_M,y_M,z_M).$$

Autrement dit l'encadrement (1) reste vrai si $(x,y,z) \notin K$ et est donc vrai pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. La fonction f possède donc un minimum global en (x_m,y_m,z_m) et un maximum global en (x_M,y_M,z_M).

Finalement un minimum, resp. maximum, global est nécessairement un minimum, resp. maximum, local. D'après les questions b) et c) le minimum global de f est atteint en $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et vaut $-3\mathrm{e}^{-1/2}$ et qon maximum global est atteint en $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ et vaut $3\,\mathrm{e}^{-1/2}$.