L3 Mathématiques
7 Mai 2019

UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique

Durée: 3h. Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
Total des points sur 30 (le barême de chaque exercice est donné à titre indicatif).
Note finale: les 10 premiers points comptent en totalité, les suivants pour moitié.
Par exemple, pour un total de 16 sur 30, la note sera $10 + 6/2 = 13$ sur 20.

Exercice 1. [12pts] Les parties I et II sont totalement indépendantes.

Partie I. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P_f de degré inférieur ou égal à 3 tel que

$$P_f(0) = f(0), \quad P_f'(0) = f'(0), \quad P_f(1) = f(1) \quad \text{et} \quad P_f'(1) = f'(1).$$

b) Soit $x \in]0,1[$ fixé. On définit les fonctions R, Π et F sur $[0,1]$ par

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = t^2(t-1)^2 \quad \text{et} \quad F(t) = R(t)\Pi(x) - R(x)\Pi(t).$$

i) Que valent $F'(0)$ et $F'(1)$?
ii) Montrer que F s'annule en 3 points distincts que l'on précisera.
iii) En déduire que F' s'annule en 4 points distincts puis qu'il existe $\xi \in]0,1[$ tel que $F^{(4)}(\xi) = 0$.
iv) Montrer que $R(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi)\Pi(x)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 |\Pi(x)|\,\mathrm{d}x$. En déduire la majoration $\displaystyle\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_4}{720}$ où $M_4 = \displaystyle\max_{t\in[0,1]} |f^{(4)}(t)|$.

Partie II. On souhaite calculer une valeur approchée de $\ln(2)$. On considère pour cela l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ que l'on va approcher à l'aide de la méthode des trapèzes. On rappelle que si $f \in C^2([a,b])$ l'erreur commise par la méthode des trapèzes avec n sous-intervalles est majorée par $\dfrac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$ où $M_2 = \displaystyle\max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

a) Donner la valeur approchée de I obtenue par la méthode des trapèzes lorsque $n = 3$, ainsi qu'une majoration de l'erreur commise.

b) Vérifier que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est convexe sur $[0,1]$. En déduire que pour tout entier n la valeur approchée obtenue par la méthode des trapèzes est supérieure ou égale à $\ln(2)$ (on pourra commencer par faire un dessin), puis que $0,68 \leq \ln(2) \leq 0,7$.

c) Quelle valeur minimum de n faut-il prendre pour que l'estimation de l'erreur commise soit inférieure à 10^{-4}. Indication: $0,408 \leq \dfrac{1}{\sqrt{6}} \leq 0,409$.

TSVP

Partie III. On souhaite maintenant calculer une valeur approchée de $\ln(2)$ en utilisant le résultat de la partie I.

a) Déterminer le polynôme P_f associé à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

b) Calculer $J = \int_0^1 P_f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire un nouvel encadrement de $\ln(2)$.

Exercice 2. [4pts] On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels. Si $P \in E$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \displaystyle\max_{k=0,\dots,n} |a_k|$ et $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{3^k}$, i.e. $\varphi(P) = P\left(\frac{1}{3}\right)$. On admettra que $\|\cdot\|$ définit une norme sur E.
Montrer que $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue et calculer $|||\varphi|||$.

Exercice 3. [7pts] On munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme matricielle, i.e. telle que pour tous $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ on a $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$. On fixe $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère la fonction $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = 2M - MAM$.

a) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

b) Montrer que f est de classe C^1.

c) Calculer $Df(A^{-1})$. En déduire qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $M \in B(A^{-1}, \delta)$, la boule fermée de centre A^{-1} et de rayon δ, on a $|||Df(M)||| \leq \frac{1}{2}$.

d) Calculer $f(A^{-1})$. Montrer que pour tout $M \in B(A^{-1}, \delta)$ on a $f(M) \in B(A^{-1}, \delta)$. Indication: accroissements finis.

e) La question précédente assure que $f : B(A^{-1}, \delta) \to B(A^{-1}, \delta)$. Montrer que f est contractante sur $B(A^{-1}, \delta)$.

f) En déduire que si $M_0 \in B(A^{-1}, \delta)$ et $(M_k)_k$ est la suite définie par récurrence par $M_{k+1} = f(M_k)$ alors la suite $(M_k)_k$ converge vers A^{-1}.

Exercice 4. [7pts] Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right).$$

Le but de l'exercice est d'étudier les extrema de f.

a) Justifier rapidement que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^3$.

b) Montrer que f admet exactement deux points critiques: $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$ et $\left(-\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$. Indication: on pourra commencer par remarquer, en le justifiant correctement, que si (x, y, z) est point critique alors $z = y = 2x$.

c) Etudier la nature de chacun des deux points critiques.

On munit $\mathbb{R}^3$ de la norme $\|(x, y, z)\| = \max(|x|, |y|, |z|)$.

d) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a $|f(x, y, z)| \leq 5\|(x, y, z)\|\, \mathrm{e}^{-\frac{\|(x,y,z)\|^2}{2}}$.

e) En déduire qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout (x, y, z) vérifiant $\|(x, y, z)\| > R$ on a $|f(x, y, z)| < \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

f) Montrer que f admet un minimum global et un maximum global et les déterminer.