Calcul Différentiel et Analyse Numérique (L3)

Examen du 4 mai 2018, durée : 3 heures [1]

Les téléphones portables doivent être éteints
Les notes de cours et d'autres documents ne sont pas autorisés
Une rédaction courte et propre est demandée pour une note maximale

Première partie

Questions. (5 points) Pour les questions 1–5, donner la réponse (*vrai* ou *faux*) sans aucune justification. Chaque bonne réponse donnera 1 point.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une fonction continûment différentiable. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$,
$$\|f(x) - f(y)\|_{\mathbb{R}^m} \le C\|x - y\|_{\mathbb{R}^n}.$$
2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 telle que
$$f(0) = 0, \quad Df(0) = 0, \quad D^2f(0) = 0.$$
Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x)| \le \varepsilon\|x\|^2$ pour $\|x\| \le \delta$.
3. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continûment différentiable. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que la différentielle $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ soit inversible. Alors l'ensemble $f(\mathbb{R}^n) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{il existe } x \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } y = f(x)\}$ contient une boule ouverte.
4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$. Alors il existe $\delta > 0$ et une fonction $g : [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to \mathbb{R}$ tels que $f(x, g(x)) = 0$ pour $|x - x_0| \le \delta$.
5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Alors il existe un point (x_0, y_0) et un nombre $C \in \mathbb{R}$ tel que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ et $(\nabla f)(x_0, y_0) = C\,(x_0, y_0)$.

Questions de cours. (5 points)

(a) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction. Définir la notion de la différentiabilité de f au point donné $a \in \mathbb{R}^n$.

(b) Énoncer le théorème d'inversion locale pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Soit E un espace vectoriel normé et $L : E \to E$ une application linéaire. Montrer que L est continue en zéro si et seulement si
$$\sup_{x \in B} \|Lx\|_E < \infty, \tag{1}$$
où $B \subset E$ désigne la boule unité de centre zéro.

[1] *La note de l'examen* NE *est calculée par la formule* $\mathrm{NE} = \min(N1, 10) + N2$*, où* $N1$ *et* $N2$ *sont les notes pour les parties I et II.*

Question de TD. (5 points) Soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille $n \times n$ et $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une fonction définie par $\varphi(A) = \mathrm{Tr}({}^tAA)$. Déterminer les points critiques de φ.

Deuxième partie

Exercice 1. (4 points) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x, y) = x + y + 1 - \cos^2(x + y).$$

(a) Montrer que l'equation $f(x, y) = 0$ au voisinage de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ détermine implicitement une fonction $y = \varphi(x)$ de classe C^1.

(b) Donner le développement limité de φ à l'ordre 1 en $x_0 = 0$.

(c) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ au point $(0, 0)$.

Exercice 2. (3 points) Soit $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ et $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} -x \ln x & \text{pour } x > 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue et trouver

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+} h(x), \quad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} h(x).$$

Vérifier que $h(x) > 0$ pour $x \in]0, 1[$.

Soit $\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : x_k \geq 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n\}$ et $f_n : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f_n(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1) + \cdots + h(x_n)$.

(b) Soit $\Delta_n = \{x \in \mathbb{R}_n^+ : x_1 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. L'ensemble Δ_n est il compact?
2. Montrer que f_n atteint sa borne supérieure/inférieure sur Δ_n.
3. Montrer que $\inf_{x \in \Delta_n} f_n(x) = 0$.
4. Soit $n = 2$. Calculer $\sup_{x \in \Delta_2} f_2(x)$.
5. Déterminer par recurrence $\sup_{x \in \Delta_n} f_n(x)$

(c) Trouver $\sup_{x \in \mathbb{R}_n^+} f_n$ et $\inf_{x \in \mathbb{R}_n^+} f_n$.

Exercice 3. (3 points) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^3. On notera $\mathbb{R}_2[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

(a) Soit l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(P) = (P(0), P'(0), P(1))$. Montrer que φ est un isomorphisme. En déduire qu'il existe un polynôme $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $P_f(0) = f(0)$, $P_f'(0) = f'(0)$, $P_f(1) = f(1)$.

(b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ il existe $\xi_x \in [0, 1]$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{6} x^2(x - 1). \tag{2}$$