L3 Mathématiques
20 Juin 2017

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique - Corrigé

Exercice 1.
a) L est un polynôme de degré au plus 2 (on a 3 points d'interpolation) qui vérifie

$$L(-1) = f(-1) = 0, \quad L(0) = f(0) = 1 \quad \text{et} \quad L(1) = f(1) = 0.$$

Ainsi -1 et 1 sont racines de L qui est donc divisible par $X-1$ et $X+1$. Comme il est de degré au plus 2, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $L(X) = a(X-1)(X+1)$. Finalement, la condition $L(0) = 1$ donne $a = -1$ et $L(X) = -(X-1)(X+1) = 1 - X^2$.
b) P_0 est un polynôme unitaire de degré 0, et donc $P_0 = 1$.
P_1 est un polynôme unitaire de degré 1, donc $P_1(X) = X + a$ avec a à déterminer tel que $\langle P_0, P_1 \rangle = 0$. On calcule

$$\langle P_0, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \times (x+a)\,\mathrm{d}x = 2a.$$

D'où $a = 0$ et $P_1 = X$.
Finalement, P_2 est un polynôme unitaire de degré 2, donc $P_2(X) = X^2 + aX + b$ avec a, b à déterminer tels que $\langle P_0, P_2 \rangle = \langle P_1, P_2 \rangle = 0$. On calcule

$$\langle P_0, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \times (x^2 + ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} + 2b,$$

d'où $b = -\dfrac{1}{3}$, et

$$\langle P_1, P_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x \times (x^2 + ax + b)\,\mathrm{d}x = \frac{2a}{3},$$

d'où $a = 0$ et finalement $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$.
c) Le polynôme Q s'écrit, cf cours,

$$Q = \frac{\langle P_0, f \rangle}{\|P_0\|^2} P_0 + \frac{\langle P_1, f \rangle}{\|P_1\|^2} P_1 + \frac{\langle P_2, f \rangle}{\|P_2\|^2} P_2.$$

On calcule donc

$$\langle P_0, f \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{8}{5}, \quad \langle P_1, f \rangle = \int_{-1}^{1} x(1 - x^4)\,\mathrm{d}x = 0$$

et

$$\langle P_2, f \rangle = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})(1 - x^4)\,\mathrm{d}x = -\frac{16}{105}.$$

Par ailleurs

$$\|P_0\|^2 = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x = 2, \quad \|P_1\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \quad \|P_2\|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - \frac{1}{3})^2 \mathrm{d}x = \frac{8}{45}.$$

D'où finalement
$$Q(X) = \frac{4}{5} - \frac{6}{7}(X^2 - \frac{1}{3}) = -\frac{6}{7}X^2 + \frac{38}{35}.$$
Par définition, Q est le polynôme de meilleure approximation de degré au plus de 2 de la fonction f pour la norme $\| \|_2$, et on sait (cf cours) que ce polynôme est unique. Puisque L est de degré au plus 2, et est différrent de Q, on peut donc affirmer que $\|f - Q\|_2 < \|f - L\|_2$.

Exercice 2.
a) On a $g(t) = 1$ pour tout $t \in [0, 1]$. Pour $x \in [0, 1]$ on a donc
$$\Phi(g)(x) = \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 \mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2}.$$
On a évidemment $\|g\|_\infty = 1$. Par ailleurs une étude rapide de $\Phi(g)$ ($\Phi(g)$ est croissante et positive) montre que $\|\Phi(g)\|_\infty = \Phi(g)(1) = \frac{1}{2}$.
b) Si f est continue, F note une primitive de f et H une primitive de la fonction définie par $h(x) = xf(x)$, on a $\Phi(f)(x) = H(x) - H(0) + x(F(1) - F(x))$. Les fonctions F et H sont des primitives de fonctions continues donc sont de classe C^1 et en particulier sont continues. La fonction $\Phi(f)$ est donc bien continue (somme et produit de fonctions continues), i.e. $\Phi(f) \in E$.
La linéarité de Φ découle directement de la linéarité de l'intégrale.
c) Puisque Φ est linéaire il suffit de trouver une constante $C \geq 0$ telle que
$$\|\Phi(f)\|_\infty \leq C\|f\|_\infty, \qquad \forall f \in E. \tag{1}$$
Soit $f \in E$ et $x \in [0, 1]$. On a
$$\begin{aligned} |\Phi(f)(x)| &\leq \int_0^x |tf(t)|\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leq \|f\|_\infty \int_0^x t\,\mathrm{d}t + x\|f\|_\infty \int_x^1 \mathrm{d}t \\ &= \|f\|_\infty \left(x - \frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$
On en déduit donc que
$$\|\Phi(f)\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\Phi(f)(x)| \leq \|f\|_\infty \times \sup_{x\in[0,1]} \left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\|f\|_\infty.$$
La constante $C = \frac{1}{2}$ convient et Φ est donc bien continue.
d) Par définition, $\|\Phi\|_{L(E)}$ est la plus petite constante $C \geq 0$ telle que (1) ait lieu. Le calcul de la question précédente montre que $\|\Phi\|_{L(E)} \leq \frac{1}{2}$. Pour montrer l'égalité il suffit de trouver une fonction $f \in E$ non nulle telle que $\|\Phi(f)\|_\infty = \frac{1}{2}\|f\|_\infty$. La fonction g de la question a) convient, et donc finalement on a bien $\|\Phi\|_{L(E)} = \frac{1}{2}$.

Exercice 3. On commence par noter que f est une fonction polynomiale et donc de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$. Tous les calculs ultérieurs (points critiques, hessienne, etc...) sont donc justifiés.
a) On calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3(x^2 - y^2 - 1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy$. Ainsi (x, y) est point critique de f si et seulement si
$$3(x^2 - y^2 - 1) = 0 \qquad \text{et} \quad -6xy = 0.$$

La seconde équation est vérifiée si et seulement si $x = 0$ ou $y = 0$. Si $x = 0$ la première équation n'a pas de solution, et si $y = 0$ la première équation est équivalente à $x^2 = 1$ et donc $x = \pm 1$.

Finalement on trouve deux points critiques: $(1, 0)$ et $(-1, 0)$. Pour étudier leur nature on commence par calculer la matrice hessienne de f en chacun de ces points. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -6x,$$

et donc

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_f(1,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas il y a une valeur propre strictement négative, -6, et une strictement positive, 6. La forme quadratique associée n'est donc ni positive ni négative, sa signature est $(1, 1)$, et les deux points critiques de f sont donc des points selle.

b) L'ensemble D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$, donc un compact ($\mathbb{R}^2$ est de dimension finie). Comme la fonction f est continue elle admet un minimum global et un maximum global sur D.

c) Supposons que l'un de ces extrema n'est pas sur C, par exemple le minimum. Il est donc dans l'ensemble $D \setminus C$ qui est le disque ouvert de centre O et de rayon 1. Si on note (x_0, y_0) ce minimum, il existe donc $r > 0$ tel que $B_{(x_0,y_0)}(r) \subset D \setminus C \subset D$ ($D \setminus C$ est ouvert) et donc pour tout $(x, y) \in B_{(x_0,y_0)}(r)$ on a $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$. Autrement dit (x_0, y_0) serait un minimum local de f sur $\mathbb{R}^2$ ce qui contredit la question a). Le raisonnement est le même pour le maximum.

Conclusion: les extrema de f sur D sont atteints sur l'ensemble C.

d) Cf cours

e) On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ de sorte que $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x, y) = 0\}$. Les fonctions f et g sont de classe C^1. Par ailleurs on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y$, et donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y = 0$. Or $(0, 0) \notin C$, ce qui prouve que la contrainte C est régulière. Toutes les hypothèses du théorème des extrema liés sont ainsi vérifiées et si (x, y) est un extremum local de f sur C il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \\ g(x,y) & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3(x^2 - 1 - y^2) & = & 2\lambda x \\ -6xy & = & 2\lambda y \\ x^2 + y^2 - 1 & = & 0 \end{array}\right.$$

La deuxième équation donne $y = 0$ ou $\lambda = -3x$.

- Si $y = 0$, la troisième équation donne $x^2 = 1$ et la première $3(x^2 - 1) = 2\lambda x$. On en déduit que $x = \pm 1$ et que dans les deux cas $\lambda = 0$.
- Si $\lambda = -3x$, la première équation donne $3x^2 - 1 - y^2 = 0$ et la troisième $x^2 + y^2 - 1 = 0$. En ajoutant les deux on obtient $4x^2 = 2$ et donc $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. En injectant la valeur de x dans la première ou la troisième équation on trouve alors $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, et λ à l'aide de $\lambda = -3x$.

Au final, les solutions du système sont les triplets (x, y, λ) suivants: $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. Si $(x, y) \in C$ est un extremum local de f sur C il correspond nécessairement à l'un des triplets ci-dessus. On sait par ailleurs que f possède un minimum et un maximum global de f sur C. Pour les déterminer il suffit donc de calculer la valeur de f en chacun de ces points. On trouve $f(1,0) = -2$, $f(-1,0) = 2$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$, $f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$.

Conclusion: le minimum de f sur C, et donc sur D, est $-2\sqrt{2}$ (atteint en deux points) et son maximum est $2\sqrt{2}$ (atteint également en deux points).

Exercice 4.

a) Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$, montrons que f est différentiable en M. Soit $H \in M_n(\mathbb{R})$ et $t \in \mathbb{R}^*$. On a (on rappelle que la trace est linéaire)

$$\frac{1}{t}(f(M+tH) - f(M)) = \mathrm{Tr}\left({}^tMH + {}^tHM + H\right) + t\mathrm{Tr}({}^tHH) \xrightarrow{t\to 0} \mathrm{Tr}\left({}^tMH + {}^tHM + H\right)$$

f est donc dérivable en M dans la direction H. Si f est différentiable en M sa différentielle $Df(M)$ est donc l'application

$$L : H \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tMH + {}^tHM + H\right).$$

On vérifie facilement que L est bien linéaire, et comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie L est continue. Il reste à montrer que $f(M+H) - f(M) - L(H) = o(H)$ lorsque $H \to 0$.

Toujours en utilisant la linéarité de la trace on calcule $f(M+H) - f(M) - L(H) = \mathrm{Tr}({}^tHH)$. Or, si $H = (h_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$({}^tHH)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} ({}^tH)_{ik}(H)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} h_{ki}h_{kj},$$

et donc

$$\mathrm{Tr}({}^tHH) = \sum_{i=1}^{n} ({}^tHH)_{ii} = \sum_{i,k=1}^{n} h_{ki}h_{ki} = \|H\|^2.$$

On a ainsi $f(M+H) - f(M) - L(H) = \|H\|^2 = o(H)$, ce qui prouve que f est différentiable en M de différentielle $Df(M) : H \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tMH + {}^tHM + H\right)$.

b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$ on ait $\mathrm{Tr}(AM) = 0$. En prenant $M = {}^tA$ on a donc en particulier $0 = \mathrm{Tr}(A\,{}^tA) = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \|A\|^2$ et donc $A = 0$.

c) On cherche les matrices M telles que pour tout $H \in M_n(\mathbb{R})$ on ait

$$Df(M)(H) = \mathrm{Tr}\left({}^tMH + {}^tHM + H\right) = 0.$$

En utilisant la linéarité de la trace et le fait que, pour toute matrice A, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}({}^tA)$ on cherche donc M telle que, pour toute matrice H

$$0 = \mathrm{Tr}\left({}^tMH\right) + \mathrm{Tr}\left({}^tHM\right) + \mathrm{Tr}(H) = \mathrm{Tr}\left({}^tMH\right) + \mathrm{Tr}\left(\underbrace{{}^t({}^tHM)}_{={}^tMH}\right) + \mathrm{Tr}(H) = \mathrm{Tr}\left((2\times {}^tM + I)H\right),$$

où I désigne la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$. D'après la question b) on en déduit que M vérifie

$$2\times {}^tM + I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad {}^tM = -\frac{1}{2}I \quad \Leftrightarrow \quad M = -\frac{1}{2}\,{}^tI = -\frac{1}{2}I.$$

La fonction f possède un unique point critique, la matrice $-\frac{1}{2}I$.