Corrigé de l'examen du cours *Calcul intégral et analyse numérique*

Questions.

1. faux: la dérivée peut être non bornée
2. vrai: c'est une conséquence du développement limitée d'ordre 2
3. vrai: c'est une conséquence du théorème d'inversion locale
4. faux: $f(x,y)=x$, $x_0=y_0=0$.
5. vrai: c'est une conséquence du théorème sur les multiplicateurs de Lagrange

$\square$

Questions de cours. **(a)** (1) On dit que f est différentiable au point a si il existe une application linéaire $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ telle que

$$\lim_{\|h\|\to 0}\frac{\|f(a+h)-f(a)-Lh\|}{\|h\|}=0.$$

(b) (1) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable et $x_0\in\mathbb{R}$ un point tels que $f'(x_0)\neq 0$. Alors il existent des ouverts $U\ni x_0$ and $V\ni f(x_0)$ tels que $f:U\to V$ est une difféomorphisme.

(c) (3) Si (1) a lieu, alors $\|Lx\|\le C\|x\|$ pour tout $x\in E$, où C désigne le supremum dans (1). Il s'ensuit que si $x_n\to 0$, alors $\|Lx_n\|\le C\|x_n\|\to 0$. Réciproquement, si $\|Lx_n\|\to+\infty$ pour une suite $(x_n)\subset B$, alors la suite des éléments $y_n=\frac{x_n}{\|Lx_n\|}$ converge vers zéro, mais $\|Ly_n\|=1$, et la suite (Ly_n) ne converge pas vers zéro. $\square$

Questions de TD. La dérivée de f a la forme

$$Df(A)H=\mathrm{Tr}({}^tAH+{}^tHA)=2\,\mathrm{Tr}({}^tAH)=2\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}h_{ij}.$$

Il s'ensuit que $Df(A)H=0$ pour tout $H\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $a_{ij}=0$ pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$. La matrice $A=0$ est donc le seul point critique de f. $\square$

Exercice 1. **(a)** (1.5) La fonction f est infiniment différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, on peut appliquer le théorème des fonctions implicites et trouver des ouverts $U\ni 0$, $V\ni 0$ et une fonction $\varphi:U\to V$ de classe C^1 tels que, pour $(x,y)\in U\times V$,

$$f(x,y)=0\quad\Longleftrightarrow\quad y=\varphi(x).$$

(b) (1.5) On sait que

$$\varphi'(x)=-\Big(\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\Big)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))\quad\text{pour } x\in U.$$

En particulier, $\varphi'(0) = -1$, d'où on voit que

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + o(x) = -x + o(x).$$

(c) (1) La droite tangente au graphe de la fonction φ en zéro est donnée par $y = \varphi(0) + \varphi'(0)x$, soit $y = -x$. $\square$

Exercice 2. **(a)** (0.5) La continuité pour $x > 0$ est évidente. Comme $x \ln x \to 0$ quand $x \to 0$, on a la continuité en zéro aussi. Comme $h'(x) = -\ln x - 1$, on a un seul point critique, $x = e^{-1}$, et on trouve facilement que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+} h(x) = -\infty, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} h(x) = h(e^{-1}) = e^{-1}.$$

Enfin, pour $x \in]0, 1[$, on a $\ln x < 0$ et donc $h(x) > 0$.

(b) (1.5)

1. Δ_n est compact
2. f_n est continue sur le compact Δ_n et atteint ses bornes.
3. Comme $h(x) \geq 0$ pour $x \in [0, 1]$ et $f_n(1, 0, \ldots, 0) = 0$, on voit que $\inf_{x \in \Delta_n} f_n = 0$.
4. Pour $n = 2$, on pose $x_1 = t$, $x_2 = 1 - t$ avec $t \in [0, 1]$. On obtient ainsi la fonction continue $g(t) = f(t, 1 - t) = -t \ln t - (1 - t) \ln(1 - t)$ sur $[0, 1]$. Il est facile à voir que le maximum de g est atteint au point $t = 1/2$ et est égal à $\ln 2$.
5. Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que

$$\sup_{x \in \Delta_n} f_n = \ln n. \tag{3}$$

Pour $n = 2$, la relation est démontrée. Supposons que (3) est démontré pour tout $n \leq k - 1$ et considérons le cas $n = k$. La fonction f_k est continue sur Δ_k et possède un maximum $P = (p_1, \ldots, p_k) \in \Delta_k$. Comme $f_k(k^{-1}, \ldots, k^{-1}) = \ln k$ et f_k est majoré par $\ln(k - 1)$ sur le bord de Δ_k, le point P appartient à l'intérieur de Δ_k. En appliquant le théorème sur les extrema liés, on conclut qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\nabla f_k)(p_1, \ldots, p_k) = \lambda(1, \ldots, 1).$$

Il s'ensuit que $-\ln p_j - 1 = \lambda$ pour tout $j \in [\![1, k]\!]$ et donc $p_j = k^{-1}$, d'où on conclut que $f_k(P) = \ln k$.

(b) (1) Comme $f_n(x_1, 0, \ldots, 0) = h(x_1)$ et $h(x) \to -\infty$ quand $x \to +\infty$, on a $\inf_{x \in \mathbb{R}_n^+} f_n = -\infty$. D'autre part,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}_n^+} f_n \leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{x_k \geq 0} h(x_k) = ne^{-1}.$$

Comme $f_n(e^{-1}, \ldots, e^{-1}) = ne^{-1}$, on conclut que $\sup_{x \in \mathbb{R}_n^+} f_n = ne^{-1}$. $\square$

Exercice 3. **(a)** (1) Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = \dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}. \tag{4}$$

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $\varphi(P) = 0$, alors on a

$$c = 0, \quad b = 0, \quad a + b + c = 0,$$

d'où on voit que $P = 0$. Comme φ est un isomorphisme, il existe $P_f \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $\varphi(P_f) = (f(0), f'(0), f(1))$.

(b) (2) L'égalité (2) est évidente pour $x = 0$ et $x = 1$. Soit

$$R(t) = f(t) - P_f(t), \quad \Pi(t) = t^2(t-1).$$

Alors pour tout $x \in]0,1[$ la fonction $g(t) = R(x)\Pi(t) - R(t)\Pi(x)$ s'annule aux points $t = 0$, $t = x$, $t = 1$ et, en plus, $g'(0) = 0$. En appliquant le théorème de Rolle, on peut trouver $\xi_x \in [0,1]$ tel que $g^{(3)}(\xi_x) = 0$. Cette égalité est équivalente à (2). $\square$