L3 Mathématiques
2 Mai 2017

Examen de Calcul différentiel et Analyse numérique - Corrigé

Exercice 1. On considère l'équation différentielle

$$\left\{\begin{array}{lcl} y'(t) & = & \cos(\mathrm{e}^t + y(t)), \\ y(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

a) L'équation différentielle est de la forme $y'(t) = f(t, y(t))$ où f est la fonction définie sur $I \times \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $f(t, y) = \cos(\mathrm{e}^t + y)$. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis elle est localement Lipschitzienne par rapport à la variable y. Le Théorème de Cauchy-Lipschitz assure que le problème de Cauchy considéré possède une unique solution maximale. Par ailleurs la fonction f est bornée ($|f(t, y)| \leq 1$ pour tout $(t, y) \in I \times \Omega$) donc la solution est définie sur $I = \mathbb{R}$.

On pourrait aussi argumenter que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, y) = -\sin(\mathrm{e}^t + y)$ est bornée. Donc, toujours d'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est globalement Lipschitzienne par rapport à la variable y ce qui assure que la solution est globale, i.e. définie sur $I = \mathbb{R}$.

b) On a

$$\phi(t, y, h) = \frac{1}{2}\cos(\mathrm{e}^t + y) + \frac{1}{2}\cos\left(\mathrm{e}^{t+h} + y + h\cos(\mathrm{e}^t + y)\right).$$

c) La fonction ϕ est de classe C^1, et même C^∞, sur $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ (on rappelle que le pas h vérifie $0 \leq h \leq T$).

Consistance: Le schéma est consistant si et seulement on a $\phi(t, y, 0) = f(t, y)$ ce que l'on vérifie immédiatement.

Stabilité: Le schéma est stable si la fonction ϕ est globalement Lipschitzienne par rapport à la variable y. Dans ce cas, et si Λ est une constante de Lipschitz, la constante de stabilité est $S = \mathrm{e}^{\Lambda T}$.

Ici on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y, h) = -\frac{1}{2}\sin(\mathrm{e}^t + y) - \frac{1}{2}\sin\left(\mathrm{e}^{t+h} + y + \cos(\mathrm{e}^t + y)\right) \times \left[1 - h\sin(\mathrm{e}^t + y)\right].$$

A l'aide de l'inégalité triangulaire on obtient donc, pour tout $(t, y, h) \in \mathbb{R}^2 \times [0, T]$,

$$\left|\frac{\partial \phi}{\partial y}(t, y, h)\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 + h) \leq 1 + \frac{T}{2}.$$

L'inégalité des accroissements finis garantit que ϕ est globalement Lipschitzienne par rapport à y avec $\Lambda \leq 1 + \frac{T}{2}$ et donc le schéma est stable et $S = \mathrm{e}^{T(1+T/2)}$ convient.

d) Les fonctions ϕ et f sont de classe C^2. Le schéma est d'ordre au moins 2 si on a, pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\phi(t, y, 0) = f(t, y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, 0) = \frac{1}{2}f^{[1]}(t, y) := \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial t}(t, y) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) f(t, y).$$

La première condition a déjà été vérifiée à la question c). On vérifie ensuite que

$$\frac{\partial \phi}{\partial h}(t, y, 0) = -\frac{1}{2}\sin(\mathrm{e}^t + y) \times [\mathrm{e}^t + \cos(\mathrm{e}^t + y)] = \frac{1}{2}f^{[1]}(t, y).$$

Le schéma est donc bien d'ordre au moins 2.
N.B.: Le schéma proposé correspond à la méthode du point milieu qui a été vue en cours à titre d'exemple.

Exercice 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^4.

a) On considère $\Phi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ définie par $\Phi(P) = (P(0), P'(0), P(1), P'(1))$. La question posée revient à montrer que Φ est bijective.

On remarque facilement que Φ est linéaire, et comme $\dim \mathbb{R}_3[X] = \dim \mathbb{R}^4 = 4$, pour montrer que Φ est bijective il suffit de montrer qu'elle est injective (conséquence du théorème du rang). Soit donc $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\Phi(P) = 0$. On en déduit que 0 et 1 sont tous les deux racines au moins double de P. Comme ce dernier est de degré au plus 3 on en déduit que P est nul (cf cours de L1 sur les polynômes). Finalement $\operatorname{Ker}\Phi = \{0\}$ et Φ est injective et donc bijective.

b) i) On a $F'(t) = R'(t)\Pi(x) - R(x)\Pi'(t)$ avec $R(t) = f(t) - P_f(t)$. Par définition de P_f on a $R'(0) = R'(1) = 0$. Par ailleurs 0 et 1 sont racines doubles de Π donc $\Pi'(0) = \Pi'(1) = 0$. On en déduit que $F'(0) = F'(1) = 0$.

ii) Le même argument que ci-dessus permet de vérifier que $F(0) = F(1) = 0$. Par ailleurs on a de façon évidente $F(x) = 0$. Comme $x \in]0,1[$ la fonction F a bien trois racines distinctes.

iii) La fonction F est de classe C^4 (car f l'est et que R et Π sont des polynômes donc C^∞). On pourra donc essayer d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction F ainsi qu'à ses dérivées successives F', F'' et F'''.
On a $F(0) = F(x) = F(1) = 0$. On applique le théorème de Rolle à F sur chacun des intervalles $[0,x]$ et $[x,1]$. Il existe donc $0 < x_1 < x < x_2 < 1$ tels que $F'(x_1) = F'(x_2) = 0$. Par ailleurs $F'(0) = F'(1) = 0$. On peut donc appliquer ensuite Rolle à F' sur chacun des intervalles $[0,x_1]$, $[x_1,x_2]$ et $[x_2,1]$. Il existe donc y_1, y_2, y_3 vérifiant

$$0 < y_1 < x_1 < y_2 < x_2 < y_3 < 1 \quad \text{et} \quad F''(y_1) = F''(y_2) = F''(y_3) = 0.$$

En particulier les y_i sont distincts.
On continue de même en appliquant Rolle à F'' sur $[y_1,y_2]$ et $[y_2,y_3]$: il existe $y_1 < z_1 < y_2 < z_2 < y_3$ tels que $F'''(z_1) = F'''(z_2) = 0$. Et une dernière application de Rolle à F''' sur $[z_1,z_2]$ donne le résultat.

iv) On a $0 = F^{(4)}(\xi) = R^{(4)}(\xi)\Pi(x) - \Pi^{(4)}(\xi)R(x)$. Or $\Pi(t) = t^2(t-1)^2$ est un polynôme de degré 4 donc sa dérivée quatrième est constante. Le coefficient dominant de Π étant 1 on obtient $\Pi^{(4)}(\xi) = 4!$. Par ailleurs $R^{(4)} = f^{(4)} - P_f^{(4)}$ et P_f est de degré au plus 3 donc sa dérivée quatrième est nulle. Finalement on a

$$0 = F^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi)\Pi(x) - 4! \times R(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)\Pi(x)}{4!}.$$

c) On a $\Pi(t) = t^2(t-1)^2 \geq 0$ donc

$$\int_0^1 |\Pi(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2(t-1)^2\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^4 - 2t^3 + t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30}.$$

On a alors, d'après b)iv),

$$\|f - P_f\|_1 = \int_0^1 |f(x) - P_f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |R(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{4!}\int_0^1 |\Pi(x)f^{(4)}(\xi)|\,\mathrm{d}x.$$

Attention!!! Le ξ dépend de x et on ne peut donc pas sortir $f^{(4)}(\xi)$ de l'intégrale. On commence par le majorer par M_4 et on a alors

$$\|f - P_f\|_1 \leq \frac{1}{24}\int_0^1 M_4|\Pi(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{M_4}{24}\int_0^1 |\Pi(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{M_4}{720}.$$

d) i) On a $f(0) = f'(0) = 0$ donc 0 est racine au moins double de P_f. Ainsi P_f peut s'écrire $P_f(X) = X^2(aX + b)$. En utilisant $P_f(1) = f(1) = 1$ et $P_f'(1) = f'(1) = 5$ on en déduit que

$$a + b = 1 \quad \text{et} \quad 3a + 2b = 5.$$

Finalement on trouve $a = 3$ et $b = -2$, et donc $P_f(x) = 3x^3 - 2x^2$.

ii) On a $f(x) - P_f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2$ est un polynôme de degré 5 dont 0 et 1 sont racines au moins doubles (par définition de P_f). Donc on peut le factoriser par x^2 et $(x-1)^2$. La factorisation donne alors $f(x) - P_f(x) = x^2(x-1)^2(x+2)$ qui est positif sur $[0,1]$ donc

$$\|f - P_f\|_1 = \int_0^1 |f(x) - P_f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) - P_f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

Par ailleurs $f(4)(x) = 120x$ donc $M_4 = 120$ et $\frac{M_4}{720} = \frac{1}{6}$.
L'inégalité du c) est bien sur vérifiée (elle l'est pour toute fonction f de classe C^4!!). L'exemple $f(x) = x^5$ montre juste que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 3.

a) $f(V)$ est la suite constante égale à -6. On calcule alors facilement $\|V\| = 3$ et $\|f(V)\| = 6$.

b) Si $U \in \ell^\infty$ il existe $M \geq 0$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout n. Pour tout entier n on a donc $|u_n u_{n+1}| \leq M^2$ ce qui prouve que la suite $f(U)$ est bornée, i.e. $f(U) \in \ell^\infty$. On peut aussi noter qu'on a $\|f(U)\| \leq \|U\|^2$. (L'exemple de la suite V montre qu'il n'y a pas toujours égalité.)

c) i) Pour tout n on a $w_n = 1$. Si $H = (h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme général de la suite $W + H$ est $1 + h_n$ et celui de la suite $f(W + H)$ est donc $(1 + h_n)(1 + h_{n+1})$.

ii) Pour montrer que f est différentiable en W, de différentielle l'application

$$L : H = (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto L(H) = (h_{n+1} + h_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

il faut montrer que L est une application linéaire continue de ℓ^∞ dans ℓ^∞ et que

$$f(W + H) - f(W) - L(H) = o(H).$$

On vérifie facilement que L est linéaire. Par ailleurs, on a

$$\|L(H)\| = \sup_n |h_n + h_{n+1}| \leq \sup_n(|h_n| + |h_{n+1}|) \leq \sup_n |h_n| + \sup_n |h_{n+1}| \leq 2\|H\|.$$

L'application L est donc bien continue, de norme inférieure ou égale à 2. **Attention!! on n'est pas en dimension finie! On ne pouvait pas utiliser cet argument ici.**
Le terme général de la suite $f(W + H) - f(W) - L(H)$ est

$$(1 + h_n)(1 + h_{n+1}) - 1 - (h_{n+1} + h_n) = h_n h_{n+1}.$$

Autrement dit, $f(W + H) - f(W) - L(H) = f(H)$. On a vu au b) que $\|f(H)\| \leq \|H\|^2$, donc $\frac{\|f(H)\|}{\|H\|} \leq \|H\| \to 0$ lorsque $H \to 0$. Cela prouve bien que $f(W + H) - f(W) - L(H) = o(H)$.
Finalement f est différentiable en W et $Df(W) = L$.

d) On procède exactement comme ci-dessus.

1. L_U est linéaire et on a

$$\begin{aligned}
\|L_U(H)\| &= \sup_n |u_n h_{n+1} + u_{n+1} h_n| \\
&\leq \sup_n (|u_n||h_{n+1}| + |u_{n+1}||h_n|) \\
&\leq \sup_n |u_n| \times \sup_n |h_{n+1}| + \sup_n |u_{n+1}| \times \sup_n |h_n| \\
&\leq 2\|U\| \times \|H\|.
\end{aligned}$$

L'application L_U est donc bien continue, de norme inférieure ou égale à $2\|U\|$.

2. Le terme général de la suite $f(U+H)-f(U)-L_U(H)$ est

$$(u_n+h_n)(u_{n+1}+h_{n+1})-u_nu_{n+1}-(u_nh_{n+1}+u_{n+1}h_n)=h_nh_{n+1}.$$

Autrement dit, $f(U+H)-f(U)-L_U(H)=f(H)$ et on a prouvé à la question précédente que $f(H)=o(H)$. Finalement f est différentiable en U et $Df(U)=L_U$.

e) Il faut ici montrer que Df est continue, i.e. que $U\mapsto Df(U)$ est continue de ℓ^∞ dans $L(\ell^\infty)$.
Soient $U,U'\in\ell^\infty$. Pour tout $H\in\ell^\infty$ le terme général de la suite $Df(U)(H)-Df(U')(H)$ est

$$(u_nh_{n+1}+u_{n+1}h_n)-(u'_nh_{n+1}+u'_{n+1}h_n)=(u_n-u'_n)h_{n+1}+(u_{n+1}-u'_{n+1)})h_n.$$

Le même calcul qu'à la question d) montre que

$$\|Df(U)(H)-Df(U')(H)\|\leq 2\|U-U'\|\|H\|$$

et donc que $\|Df(U)-Df(U')\|_{L(\ell^\infty)}\leq 2\|U-U'\|$. Cela prouve que Df est continue, elle est même 2-Lipschitzienne, et donc f est C^1.

f) i) On reprend le calcul du d) en notant que si $H\in\ell^\infty$ pour tout n on a $|h_n|\leq\|H\|$.
On a

$$\begin{aligned}
\|Df(U)\|_{L(\ell^\infty)} &= \sup_{\|H\|\leq 1}\|Df(U)(H)\|\\
&= \sup_{\|H\|\leq 1}\left(\sup_n|u_nh_{n+1}+u_{n+1}h_n|\right)\\
&\leq \sup_{\|H\|\leq 1}\left(\sup_n(|u_n||h_{n+1}|+|u_{n+1}||h_n|)\right)\\
&\leq \sup_{\|H\|\leq 1}\left(\sup_n(|u_n|+|u_{n+1}|)\right) \qquad \text{car } |h_{n/n+1}|\leq\|H\|\leq 1\\
&\leq \sup_n(|u_n|+|u_{n+1}|).
\end{aligned}$$

ii) On a $|v_{2k}|=2$ et $|v_{2k+1}|=3$. On en déduit que pour tout n on a $|v_n|+|v_{n+1}|=5$ et donc d'après i) on a $\|Df(V)\|\leq 5$.
Pour montrer l'égalité il suffit de trouver H tel que $\|H\|\leq 1$ et $\|Df(V)(H)\|=5$. C'est le cas si on prend H la suite de terme général $h_n=(-1)^n$.

iii) On a déjà $\|Df(U)\|\leq\sup\limits_n(|u_n|+|u_{n+1}|)$. Il reste à montrer l'autre inégalité, i.e. en notant $A=\sup_n(|u_n|+|u_{n+1}|)$ que $\|Df(U)\|\geq A$. On ne sait pas si cette borne supérieure est atteinte. Soit donc $\epsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$|u_N|+|u_{N+1}|>A-\epsilon.$$

Prenons H la suite définie par:

- $h_N=1$ si $u_{N+1}\geq 0$ et $h_N=-1$ sinon,
- $h_{N+1}=1$ si $u_N\geq 0$ et $h_{N+1}=-1$ sinon,
- $h_n=0$ si $n\neq N,N+1$.

On a bien $\|H\|=1$ et le choix de H assure que $u_Nh_{N+1}=|u_N|$ et $u_{N+1}h_n=|u_{N+1}|$. On a donc, pour ce H,

$$\|Df(U)(H)\|=\sup_n|u_nh_{n+1}+u_{n+1}h_n|\geq|u_Nh_{N+1}+u_{N+1}h_N|=|u_N|+|u_{N+1}|>A-\epsilon,$$

et donc $\|Df(U)\|\geq A-\epsilon$. Ceci étant vrai pour tout $\epsilon>0$, en faisant tendre ϵ vers 0 on obtient bien que $\|Df(U)\|\geq A$.
N.B.: si le sup était atteint dans la définition de A on pourrait directement prendre N tel que $|u_N|+|u_{N+1}|=A$ et on effectue ensuite le même raisonnement.

Exercice 4.

a) $(E, \| \|_E)$ est un Banach si toute suite de Cauchy d'éléments de E converge dans E.

b) Si $f \in L(E,F)$, par définition on a

$$\|f\|_{L(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

De façon équivalente on a aussi

$$\|f\|_{L(E,F)} = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

c) Par définition d'une suite de Cauchy on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geq N,\ \|f_n - f_p\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et N comme ci-dessus. Pour tous $n, p \geq N$ et $x \in E$ on a, par définition de $\| \|_{L(E,F)}$,

$$\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|f_n - f_p\|_{L(E,F)} \times \|x\|_E \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

On a donc bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n, p \geq N, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

d) Si $x = 0$, comme les f_n sont linéaires on a $f_n(0) = 0$ pour tout n et donc la suite $(f_n(0))_n$ converge vers 0.

Si $x \neq 0$ est fixé, soit $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\|x\|_E} > 0$ (on utilise ici $x \neq 0$). D'après c) appliqué avec ε' il existe N tel que pour tous $n, p \geq N$ on ait, pour tout $y \in E$,

$$\|f_n(y) - f_p(y)\|_F \leq \varepsilon'\|y\|_E.$$

En particulier pour $y = x$ on a $\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon'\|x\|_E = \varepsilon$. On a ainsi prouvé que "*étant donné* $\varepsilon > 0$*, on peut trouver* $N \in \mathbb{N}$ *tel que pour tous* $n, p \geq N$ *on ait* $\|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon$". Autrement dit la suite $(f_n(x))_n$ est de Cauchy dans F qui est un Banach, donc elle converge dans F. On note $f(x)$ sa limite.

e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, tous $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$f_n(\lambda x + y) = \lambda f_n(x) + f_n(y).$$

En passant à la limite $n \to \infty$ dans l'égalité ci-dessus on obtient $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$, ce qui prouve la linéarité de f.

f) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n, p \geq N, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

Un tel N existe d'après c). Etant donnés $n \geq N$ et $x \in E$, on fait tendre p vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus (c'est possible puisque l'inégalité est vraie pour tout $p \geq N$). Comme $f_p(x) \to f(x)$ et par continuité de la norme $\| \|_F$, on en déduit que

$$\underline{\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E}.$$

Au final on a bien montré

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \forall x \in E,\ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E.$$

g) La phrase " $\forall x \in E,\ \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\|x\|_E$" est équivalente à "$f_n - f \in L(E,F)$ et $\|f_n - f\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon$". La question précédente montre donc que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ f_n - f \in L(E,F) \text{ et } \|f_n - f\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon.$$

Finalement, soit $\varepsilon > 0$ fixé et N comme ci-dessus. On a $f_N - f \in L(E,F)$ et $f_N \in L(E,F)$ (par hypothèse). Comme $L(E,F)$ est un espace vectoriel on en déduit que $f = f_N - (f_N - f) \in L(E,F)$.

h) La phrase

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \|f_n - f\|_{L(E,F)} \leq \varepsilon$$

est précisément la définition de $\lim f_n = f$ dans $L(E, F)$. Etant donnée une suite de Cauchy $(f_n)_n$ dans $L(E, F)$ on a donc montré que celle-ci convergeait vers un certain $f \in L(E, F)$, i.e. toute suite de Cauchy dans $L(E, F)$ converge dans $L(E, F)$. C'est la définition de $L(E, F)$ est un Banach.

Exercice 5.

a) La fonction $f(x, y) = xy + \sin(x + y)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est de classe C^1 (et même C^∞). Si $(x_0, y_0) = (0, 0)$ on a $f(x_0, y_0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + \cos(x + y)$ et donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 1 \neq 0$. Le théorème des fonctions implicites permet d'affirmer qu'il existe V voisinage de $x_0 = 0$, W voisinage de $y_0 = 0$ et $\varphi : V \to W$ de classe C^1 tels que

$$\forall (x, y) \in V \times W, \quad f(x, y) = 0 \iff y = \varphi(x).$$

Finalement, comme f est de classe C^∞ le théorème assure que φ est également de classe C^∞.

b) Par définition de φ on a $\varphi(x_0) = y_0$, autrement dit $\varphi(0) = 0$. Par ailleurs, pour tout $x \in V$ on a $f(x, \varphi(x)) = 0$, i.e.

$$x\varphi(x) + \sin(x + \varphi(x)) = 0.$$

La fonction $x\varphi(x) + \sin(x + \varphi(x))$ est constante (égale à 0) au voisinage de 0, ses dérivées successives sont donc nulles au voisinage de 0. En dérivant une première fois on obtient ainsi

$$\varphi(x) + x\varphi'(x) + (1 + \varphi'(x)) \cos(x + \varphi(x)) = 0$$

et donc en $x = 0$, et sachant que $\varphi(0) = 0$, on obtient $\varphi'(0) = -1$.

En dérivant une seconde fois on obtient

$$2\varphi'(x) + x\varphi''(x) + \varphi''(x) \cos(x + \varphi(x)) - (1 + \varphi'(x))^2 \sin(x + \varphi(x)) = 0$$

et donc en $x = 0$, et sachant que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = -1$, on obtient $\varphi'(0) = 2$.

Finalement, comme φ est de classe C^∞, son DL est donné par la formule de Taylor et on a, au voisinage de $x_0 = 0$,

$$\varphi(x) = -x + x^2 + o(x^2).$$

c) Au voisinage de $(0, 0)$ on a $f(x, y) = 0$ si et seulement si $y = \varphi(x)$. Ainsi, au voisinage de $(0, 0)$ la courbe C est la courbe représentative de la fonction φ. Sa tangente T au point $(0, 0)$ est donc la droite d'équation

$$y = \varphi'(0) \times (x - 0) + \varphi(0) \quad \iff \quad y = -x.$$

Pour savoir si C est au dessus ou au dessous de T on détermine, au voisinage de 0, le signe de $\varphi(x) - (-x)$. D'après b) on a au voisinage de 0

$$\varphi(x) - (-x) = x^2 + o(x^2) = x^2 (1 + o(1)).$$

Par définition $o(1)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0 donc le terme $1 + o(1)$ est positif au voisinage de 0. Comme $x^2 \geq 0$ on en déduit que $\varphi(x) - (-x) \geq 0$ au voisinage de 0, i.e. C est au dessus de T au voisinage de $(0, 0)$.