CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2024-2025**

Examen de rattrapage

La durée de cet examen est de une heure et trente minutes. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (3 points)

1. Énoncer le critère de convergence normale d'une série trigonométrique réelle $a_0 + \sum_{n\geq 1}\big(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\big)$.

2. Énoncer l'identité du parallélogramme dans un espace de Hilbert H de produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.

3. Énoncer sous quelle condition un espace de Hilbert H est dit séparable.

Exercice 1. (7 points)

Considérons la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall x \in]-\pi,\pi],\; f(x) = \begin{cases} \cos(x) \text{ si } |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1.a. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$?

2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n\geq 1}$ de la fonction f.

b. Vérifier que les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\geq 1}$ de la fonction f sont égaux à

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}, \quad a_1(f) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \forall k \geq 1,\; \begin{cases} a_{2k}(f) = \frac{2(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}, \\ a_{2k+1}(f) = 0. \end{cases}$$

3.a. Déterminer la valeur de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}.$$

b. Déterminer la valeur de la série

$$T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}.$$

Exercice 2. (5 points)

Rappelons que l'espace des suites réelles de carré sommable $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (a,b) \in \ell^2(\mathbb{N})^2,\; \langle a, b\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, b_n,$$

et considérons le sous-ensemble

$$E = \Big\{ a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ telle que } a_0 = a_1 = 0 \Big\}.$$

1.a. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Le sous-espace E est-il fermé ?

2.a. Déterminer l'orthogonal $E^\perp$ du sous-espace E dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Déterminer une base hilbertienne de $E^\perp$.

c. En déduire la décomposition d'une suite $a = (a_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ suivant le sous-espace E et son orthogonal $E^\perp$.

Exercice 3. (5 points)

Rappelons que l'espace de Lebesgue $L^2([-1,1],\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in L^2([-1,1],\mathbb{R})^2,\ \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx,$$

et considérons l'ensemble F des fonctions de la forme

$$\forall x \in [-1,1], f(x) = \alpha + \beta e^x + \gamma e^{-x},$$

où α, β et γ sont trois nombres réels.

1.a. Montrer que F est un sous-espace de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

b. Soit

$$\forall x \in [-1,1],\ f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = e^x, \quad \text{et} \quad f_3(x) = e^{-x}.$$

Vérifier que la famille (f_1, f_2, f_3) forme une base de F.

c. En déduire que F est un sous-espace fermé de $L^2([-1,1],\mathbb{R})$.

2. Considérons la fonction

$$\forall x \in [-1,1], h(x) = x,$$

et notons

$$I = \inf_{f \in F} \big\| h - f \big\|_{L^2}.$$

a. Montrer qu'il existe des nombres réels a, b et c uniques tels que

$$I = \big\| h - a f_1 - b f_2 - c f_3 \big\|_{L^2}.$$

b. Déterminer la valeur des nombres a, b et c.

c. En déduire la valeur de I.