CY Cergy Paris Université — **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques — **2023-2024**

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x + 2\pi) = f(x).$$

2. Selon l'inégalité de Bessel, les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$, et réels $(a_n(f))_{n\geq 0}$ et $(b_n(f))_{n\geq 1}$, d'une fonction f continue 2π-périodique satisfont

$$\forall N \geq 1,\ \sum_{n=-N}^{N} |c_n(f)|^2 = |a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\big) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

3. Notons $\|\cdot\|_H$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ de l'espace de Hilbert H. Étant donnés deux vecteurs x et y de H, l'identité du parallélogramme s'écrit

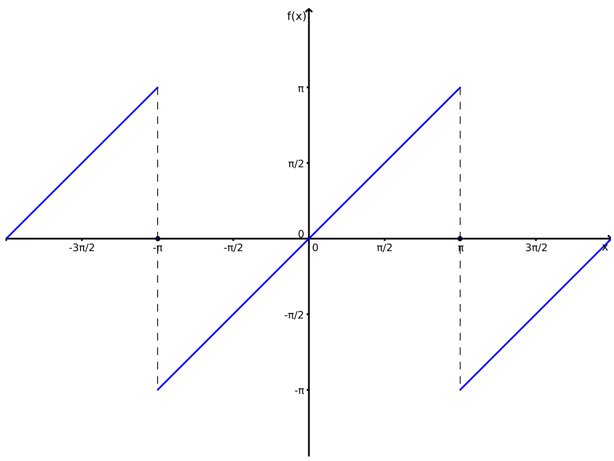
$$\|x + y\|_H^2 + \|x - y\|_H^2 = 2\big(\|x\|_H^2 + \|y\|_H^2\big).$$

4. Un sous-espace F d'un espace de Hilbert H est dense dans H si et seulement si son orthogonal $F^\perp$ satisfait

$$F^\perp = \{0\}.$$

Exercice 1.

1.a. La définition de la fonction f sur l'intervalle fondamental $]-\pi, \pi]$ et sa 2π-périodicité assurent que son graphe présente l'allure suivante :



b. Nous déduisons de la définition de la fonction f que

$$f(x) \underset{x\to\pi_-}{\longrightarrow} \pi \neq 0 = f(\pi).$$

La fonction f n'est donc pas continue en π, ni sur $\mathbb{R}$.

c. La fonction f est bien définie et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi,\pi[$, avec

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f'(x) = 1.$$

Sachant que

$$f(x) \underset{x\to(-\pi)^+}{\to} -\pi, \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to\pi_-}{\to} \pi,$$

elle est par périodicité continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Comme

$$f'(x) \underset{x\to(-\pi)^+}{\to} 1, \quad \text{et} \quad f'(x) \underset{x\to\pi_-}{\to} 1,$$

elle est de même par périodicité de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall x \in]-\pi,\pi[,\ f(-x) = -x = f(x), \quad \text{et} \quad f(-\pi) = 0 = -f(\pi),$$

ce qui assure que la fonction f est impaire sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Étant donné un nombre $y \in \mathbb{R}$, il existe de plus un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ telle que $-\pi + 2n\pi < y \leq \pi + 2n\pi$. Par 2π-périodicité, nous avons alors

$$f(y) = \begin{cases} y - 2n\pi \text{ si } y \neq \pi + 2n\pi, \\ 0 \text{ si } y = \pi + 2n\pi. \end{cases}$$

Sachant que $-\pi - 2n\pi \leq -y < \pi - 2n\pi$, nous savons que

$$f(-y) = \begin{cases} -y + 2n\pi \text{ si } y \neq \pi + 2n\pi, \\ 0 \text{ si } y = \pi + 2n\pi. \end{cases}$$

Dans les deux cas, nous obtenons

$$f(-y) = -f(y).$$

Par conséquent, la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$, et nous concluons que

$$\forall n \geq 0,\ a_n(f) = 0.$$

b. Sachant que la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$, ses coefficients de Fourier $b_n(f)$ satisfont

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\sin(nx)\,dx,$$

ce qui conduit au calcul

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\Big[-\frac{x\cos(nx)}{n}\Big]_0^\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx = -\frac{2\cos(n\pi)}{n} + \frac{2}{n^2\pi}\big(\sin(n\pi) - \sin(0)\big).$$

Comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = \sin(0) = 0$, nous concluons que

$$b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

c. Sachant que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, nous déduisons du théorème de Dirichlet la convergence de la série de Fourier $\sum_{n\geq 1} b_n(f)\sin(nx)$, et le fait que la somme de cette série soit égale à

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\sin(nx) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y\to x_-} f(y) + \lim_{y\to x_+} f(y)\Big).$$

Pour $x = \pi/2$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2}.$$

Nous vérifions alors que

$$\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \begin{cases} \sin(k\pi) = 0 \text{ si } n = 2k, \\ \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big) = (-1)^k \text{ si } n = 2k+1, \end{cases}$$

de sorte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+1}.$$

Nous concluons que

$$S_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Nous écrivons ensuite la formule de Parseval pour la fonction continue par morceaux f afin d'obtenir

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\Big(\frac{\pi^3}{3} - \frac{(-\pi)^3}{3}\Big) = \frac{\pi^2}{3}.$$

Nous déduisons donc de la formule de la question 2.b que

$$S_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2.

1. Rappelons que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$. Dans ce cas, sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Pour $\alpha > 0$, et quel que soit $x \in \mathbb{R}$, le nombre $z = e^{-\alpha+ix}$ satisfait

$$|z| = e^{-\alpha} < 1.$$

Sachant que $z^n = (e^{-\alpha+ix})^n = e^{-\alpha n+inx} = e^{-n\alpha}e^{inx}$, la série $\sum_{n\geq 0} e^{-n\alpha}e^{inx}$ est convergente quel que soit le choix du nombre réel x. Elle est donc simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et sa somme vaut

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\, e^{inx} = \frac{1}{1-e^{-\alpha+ix}} = \frac{1}{e^{-\alpha}(e^{\alpha} - e^{ix})} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - e^{ix}}$$

2.a Rappelons que

$$\forall \alpha > 0,\ \mathrm{ch}(\alpha) > 1,$$

tandis que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\cos(x)| \leq 1.$$

En particulier, il vient

$$\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x) > 0,$$

et la fonction f_α est bien définie sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, la fonction f_α est aussi 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Nous calculons enfin

$$f_\alpha(-x) = \frac{\sin(-x)}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x)} = -f_\alpha(x),$$

de sorte que la fonction f_α est impaire.

b. Rappelons que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\big(z - \bar{z}\big).$$

Nous avons donc

$$2\,\mathrm{Im}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}}\Big) = \frac{1}{i}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}} - \frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{-ix}}\Big),$$

d'où nous calculons

$$2\,\mathrm{Im}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}}\Big) = \frac{e^\alpha(e^{ix} - e^{-ix})}{i(e^\alpha - e^{ix})(e^\alpha - e^{-ix})} = \frac{2e^\alpha \sin(x)}{e^{2\alpha} + 1 - e^\alpha(e^{ix} + e^{-ix})},$$

soit

$$2\,\mathrm{Im}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}}\Big) = \frac{\sin(x)}{\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x)}.$$

c. D'après les questions 1 et 2.b, nous savons que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = 2\mathrm{Im}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}}\Big) = 2\mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\, e^{inx}\Big).$$

Sachant que la convergence d'une série $\sum_{n\geq 0} z_n$ assure celle de la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Im}(z_n)$, et que dans ce cas,

$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\big(z_n\big),$$

nous concluons que

$$f_\alpha(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}\big(e^{-n\alpha}\, e^{inx}\big) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\, \sin(nx).$$

3.a. D'après la question 2.a, la fonction f_α est impaire sur $\mathbb{R}$, et nous savons donc que

$$\forall n \geq 0,\ a_n(f_\alpha) = 0.$$

b. D'après la question 2.b, la fonction f_α est la somme de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} 2$ $e^{-n\alpha}\sin(nx)$. Sachant que $0 < e^{-\alpha} < 1$, la série $\sum_{n\geq 0} |2e^{-n\alpha}| = \sum_{n\geq 0} 2(e^{-\alpha})^n$ est convergente, ce qui assure la convergence normale de la série trigonométrique $\sum_{n\geq 0} 2e^{-n\alpha}\sin(nx)$.

De par cette convergence normale, les coefficients de Fourier $b_n(f_\alpha)$ de la somme f_α de cette série trigonométrique sont alors égaux à ceux de la série trigonométrique, soit

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f_\alpha) = 2\, e^{-n\alpha}.$$

c. Comme la fonction f_α est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nous pouvons écrire la formule de Parseval

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f_\alpha(x)\big|^2\, dx = |a_0(f_\alpha)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(|a_n(f_\alpha)|^2 + |b_n(f_\alpha)|^2\big).$$

Nous déduisons alors de la définition de la fonction f_α et des questions 3.a et 3.b que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)^2}{(\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x))^2}\, dx = 4\pi \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-2n\alpha}.$$

Sachant que $e^{-2\alpha} < 1$ puisque $\alpha > 0$, nous concluons que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)^2}{(\mathrm{ch}(\alpha) - \cos(x))^2}\, dx = \frac{4\pi e^{-2\alpha}}{1 - e^{-2\alpha}} = \frac{4\pi}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Exercice 3.

1.a. Considérons une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de H. Par comparaison, nous savons que la série $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ est convergente, de sorte que la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ appartient à l'espace $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. L'ensemble H est donc une partie de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Étant donnés un nombre réel λ et une autre suite $(b_n)_{n\geq 0}$, nous observons de plus que

$$(n+1)\big(\lambda a_n + b_n\big)^2 \leq 2\lambda^2(n+1)a_n^2 + 2(n+1)b_n^2,$$

puisque

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ \big(\alpha + \beta\big)^2 \leq 2\big(\alpha^2 + \beta^2\big).$$

Par le principe de comparaison, nous concluons que la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)(\lambda a_n + b_n)^2$ est convergente, de sorte que la suite $(\lambda a_n + b_n)_{n\geq 0}$ demeure dans H. En particulier, l'ensemble H est un sous-espace de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Sachant que

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ |\alpha\beta| \leq \frac{1}{2}\big(\alpha^2 + \beta^2\big),$$

nous obtenons

$$\forall n \geq 0,\ \big|(n+1)a_n b_n\big| \leq \frac{1}{2}\Big((n+1)a_n^2 + (n+1)b_n^2\Big).$$

Comme les suites $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ sont dans H, la série $\sum_{n\geq 0}(n+1)a_n b_n$ est par comparaison absolument convergente, donc convergente, ce qui assure que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ est bien définie de $H \times H$ dans $\mathbb{R}$.

Nous vérifions alors que cette application est bilinéaire symétrique définie positive. Sa symétrie résulte en effet du calcul suivant

$$\forall (a, b) \in H \times H,\ \langle b, a\rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)b_n a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n b_n = \langle a, b\rangle_H,$$

tandis que, par symétrie, sa bilinéarité provient du développement suivant

$$\langle \lambda a+c, b\rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(\lambda a_n+c_n)b_n = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_nb_n+\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)c_nb_n = \lambda\langle a, b\rangle_H+\langle c, b\rangle_H.$$

valable pour tout nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ et toutes suites a, b et c de H. Enfin, nous vérifions que

$$\langle a, a\rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n^2 \geq 0,$$

et que cette inégalité est une égalité si et seulement si

$$\forall n \geq 0,\ (n+1)a_n = 0,$$

soit si et seulement si la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est identiquement nulle. En conclusion, l'application $\langle \cdot, \cdot\rangle_H$ est bien un produit scalaire réel sur l'espace H.

2.a. Par définition d'une suite de Cauchy de H, quel que soit le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un entier $P \geq 0$ tel que

$$\forall p, q \geq P,\ \left\|a^{(p)} - a^{(q)}\right\|_H \leq \varepsilon,$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\big(a_n^{(p)} - a_n^{(q)}\big)^2 \leq \varepsilon^2.$$

En terme des suites $(u_n^{(p)})_{n\geq 0}$, cette inégalité s'écrit

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(u_n^{(p)} - u_n^{(q)}\big)^2 \leq \varepsilon^2,$$

c'est-à-dire

$$\left\|u^{(p)} - u^{(q)}\right\|_{\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})} \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la suite $(u^{(p)})_{p\geq 0}$ est de Cauchy dans $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Rappelons que $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, donc est complet pour sa norme canonique. Comme $(u^{(p)})_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, elle est donc convergente : il existe une suite $u^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que

$$\left\|u^{(p)} - u^\infty\right\|_{\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})} \underset{p\to+\infty}{\to} 0.$$

Introduisons alors la suite a^∞ définie par

$$\forall n \geq 0,\ a_n^\infty = \frac{u_n^\infty}{(n+1)^{\frac{1}{2}}}.$$

Nous calculons

$$\forall n \geq 0,\ (n+1)\big(a_n^\infty\big)^2 = \big(u_n^\infty\big)^2.$$

Comme $u^\infty \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, la suite a^∞ appartient au sous-espace H. De plus, elle satisfait

$$\left\|a^{(p)} - a^\infty\right\|_H^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\big(a_n^{(p)} - a_n^\infty\big)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\big(u_n^{(p)} - u_n^\infty\big)^2 = \left\|u^{(p)} - u^\infty\right\|_{\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{R})}^2,$$

de sorte que

$$\left\|a^{(p)} - a^{\infty}\right\|_H \underset{p\to+\infty}{\to} 0.$$

En conclusion, toute suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_H$ de H est convergente dans H. L'espace H est donc complet pour la norme $\|\cdot\|_H$: il s'agit bien d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire réel $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.

3.a. Pour $p, q \geq 0$, nous calculons

$$\left\langle e^{(p)}, e^{(q)}\right\rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) e_n^{(p)} e_n^{(q)}.$$

Lorsque $p \neq q$, tous les produits $e_n^{(p)} e_n^{(q)}$ sont nuls, de sorte que

$$\left\langle e^{(p)}, e^{(q)}\right\rangle_H = 0.$$

Quand $p = q$, nous obtenons

$$\left\langle e^{(p)}, e^{(p)}\right\rangle_H = (p+1)\left(e_p^{(p)}\right)^2 = \frac{p+1}{p+1} = 1,$$

et nous concluons donc que la famille $(e^{(p)})_{p\geq 0}$ est orthonormée dans H.

b. Considérons une suite $a = (a_n)_{n\geq 0}$ de H telle que

$$\forall p \geq 0, \langle a, e^{(p)}\rangle_H = 0.$$

Sachant que

$$\langle a, e^{(p)}\rangle_H = (p+1) a_p e_p^{(p)} = (p+1)^{\frac{1}{2}} a_p,$$

par définition de la suite $e^{(p)}$, nous déduisons des relations d'orthogonalité précédentes que

$$\forall p \geq 0,\ a_p = 0.$$

En particulier, l'orthogonal du sous-espace engendré par la famille $(e^{(p)})_{p\geq 0}$ est réduit au singleton $\{0\}$, ce qui assure que ce sous-espace est dense dans H, puis que cette famille est totale. D'après la question 3.a, elle est aussi orthonormée, et il s'agit donc d'une base hilbertienne de H.