CY Cergy Paris Université | **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques | **2023-2024**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Donner la définition d'une fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

2. Donner l'énoncé de l'inégalité de Bessel pour une fonction 2π-périodique $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Donner l'identité du parallélogramme pour deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$.

4. Donner une condition sur l'orthogonal d'un sous-espace F d'un espace de Hilbert H pour que ce sous-espace soit dense dans H.

Exercice 1. (5 points)

Considérons la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall x \in]-\pi, \pi],\ f(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \neq \pi, \\ 0 \text{ si } x = \pi. \end{cases}$$

1.a. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

c. Vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\geq 0}$ de la fonction f.

b. Vérifier que les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n\geq 1}$ de la fonction f sont égaux à

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

c. En déduire la valeur des séries

$$S_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 2. (6 points)

Soit $\alpha > 0$.

1. Vérifier que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} e^{-n\alpha} e^{inx}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que sa somme vaut

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\, e^{inx} = \frac{e^{\alpha}}{e^{\alpha} - e^{ix}}.$$

2. Considérons la fonction f_α définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = \frac{\sin(x)}{\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(x)}.$$

a. Vérifier que la fonction f_α est bien définie, 2π-périodique, impaire et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = 2\,\mathrm{Im}\Big(\frac{e^\alpha}{e^\alpha - e^{ix}}\Big).$$

c. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\alpha(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n\alpha}\ \sin(nx).$$

3.a. Quelle est la valeur des coefficients de Fourier $(a_n(f_\alpha))_{n\geq 0}$ de la fonction f_α ?

b. Montrer que les coefficients de Fourier $(b_n(f_\alpha))_{n\geq 1}$ de la fonction f_α sont égaux à

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f_\alpha) = 2\,e^{-n\alpha}.$$

c. En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(x)^2}{(\operatorname{ch}(\alpha) - \cos(x))^2}\,dx = \frac{4\pi}{e^{2\alpha} - 1}.$$

Exercice 3. (6 points)

Soit H l'ensemble des suites réelles $a = (a_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n^2 < +\infty.$$

1.a. Vérifier que H est un sous-espace de l'espace des suites réelles de carré sommable $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. Soit

$$\forall (a,b) \in H^2,\ \langle a, b\rangle_H = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_n b_n.$$

Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ est bien définie, et qu'il s'agit d'un produit scalaire réel sur l'espace H.

2.a. Soit $(a^{(p)})_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy de H pour la norme $\|\cdot\|_H$ associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$. Posons

$$\forall p \geq 0,\ \forall n \geq 0,\ u_n^{(p)} = (n+1)^{\frac{1}{2}}\,a_n^{(p)}.$$

Vérifier que $(u^{(p)})_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

b. En déduire que H est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$.

3.a. Pour chaque entier $p \geq 0$, considérons la suite $e^{(p)}$ de H définie par

$$\forall n \geq 0,\ e_n^{(p)} = \begin{cases} \frac{1}{(p+1)^{\frac{1}{2}}} \text{ si } n = p, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la famille $(e^{(p)})_{p\geq 0}$ est orthonormée dans H.

b. En déduire que la famille $(e^{(p)})_{p\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.