CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2022-2023**

Corrigé de l'examen

Questions de cours.

1. Les coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ sont définis par les formules

$$\forall n \in \mathbb{Z},\, c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx.$$

2. Soit g une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Supposons que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors les séries de Fourier $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(g)e^{inx}$ et $\sum_{n\geq 1} \big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\big)$ sont convergentes sur $\mathbb{R}$, et leurs sommes sont égales à

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} = a_0(f)+\sum_{n=1}^{+\infty} \big(a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y\to x_-} f(y)+\lim_{y\to x_+} f(y)\Big).$$

3. Un produit scalaire complexe $\langle\ ,\ \rangle$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application définie sur $E\times E$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

— L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est hermitienne, soit

$$\forall (x,y)\in E^2,\, \langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}.$$

— L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est sesquilinéaire, soit

$$\langle \lambda_1 x_1 + y_1, \lambda_2 x_2 + y_2\rangle = \lambda_1\overline{\lambda_2}\langle x_1,x_2\rangle + \lambda_1\langle x_1,y_2\rangle + \overline{\lambda_2}\langle y_1,x_2\rangle + \langle y_1,y_2\rangle,$$

pour tout $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{C}^2$, et tout $(x_1,y_1,x_2,y_2)\in E^4$.

— L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est positive, soit

$$\forall x\in E,\, \langle x,x\rangle \geq 0.$$

— L'application $\langle\ ,\ \rangle$ est définie, soit

$$\forall x\in E,\, \langle x,x\rangle = 0 \text{ ssi } x=0.$$

4. Soit C un sous-ensemble convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H. Quel que soit le vecteur $x\in H$, il existe un unique vecteur $P_C(x)\in C$ tel que

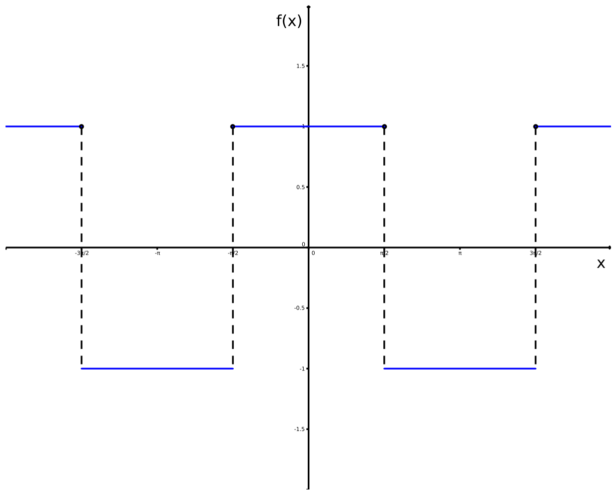
$$\big\|x - P_C(x)\big\|_H = \min_{y\in C}\big\|x-y\big\|_H.$$

Le vecteur $P_C(x)$ est le projeté orthogonal du vecteur x sur l'ensemble C, et il est caractérisé comme l'unique vecteur de C tel que

$$\forall y\in C,\, \mathrm{Re}\Big(\big\langle x-P_C(x), y-P_C(x)\big\rangle_H\Big) \leq 0.$$

Exercice 1.

1.a. Par définition, et en particulier par 2π-périodicité, le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi,2\pi]$ présente l'allure suivante.



b. Nous déduisons de la définition de la fonction f que

$$f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\to} 1,$$

tandis que

$$f(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^+}{\to} -1,$$

ce qui assure que la fonction f n'est pas continue en $\pi/2$. Elle n'est donc pas non plus continue sur $\mathbb{R}$.

c. Par définition, la fonction f se prolonge en une fonction constante égale à -1 sur le segment $[-\pi, -\pi/2]$, à 1 sur le segment $[-\pi/2, \pi/2]$, et à -1 sur le segment $[\pi/2, \pi]$. Elle se prolonge donc en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun de ces segments. En particulier, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur le segment $[-\pi, \pi]$, et par 2π-périodicité, elle demeure de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Nous vérifions que

$$\forall |x| \leq \frac{\pi}{2},\ f(-x) = 1 = f(x), \quad \text{ et } \quad \forall \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi,\ f(-x) = -1 = f(x).$$

La fonction f est donc paire sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Étant donné un nombre quelconque $x \in \mathbb{R}$, nous savons qu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\pi \leq x - 2k\pi \leq \pi$. Par parité de la fonction f sur $[-\pi, \pi]$, nous obtenons

$$f\big(-(x - 2k\pi)\big) = f(x - 2k\pi).$$

Par 2π-périodicité de la fonction f, nous en déduisons que

$$f(-x) = f(-x + 2k\pi) = f\big(-(x - 2k\pi)\big) = f(x - 2k\pi) = f(x).$$

En conclusion, la fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$, ce qui implique que

$$\forall n \geq 1,\ b_n(f) = 0.$$

b. Pour $n = 0$, nous utilisons la parité de la fonction f pour écrire

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \bigg(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi 1\, dx \bigg) = \frac{1}{\pi} \Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \Big) = 0.$$

De même, pour $n \geq 1$, nous calculons

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(nx)\,dx\Big)$$
$$= \frac{2}{n\pi}\Big(2\sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) - \sin(n\pi)\Big).$$

Rappelons alors que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \sin(n\pi) = 0,$$

tandis que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \sin\Big(\frac{n\pi}{2}\Big) = \begin{cases} \sin(k\pi) = 0 \text{ si } n = 2k, \\ \sin\Big(\frac{\pi}{2} + k\pi\Big) = (-1)^k \text{ si } n = 2k+1. \end{cases}$$

Nous en déduisons que

$$\forall k \geq 0,\ a_{2k}(f) = 0,$$

alors que

$$\forall k \geq 0,\ a_{2k+1}(f) = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}.$$

c. D'après la question 1.c, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Dirichlet pour assurer que la série de Fourier $a_0(f) + \sum_{n\geq 1}(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx))$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à

$$\forall x \in \mathbb{R},\ a_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^+} f(y)\Big).$$

D'après les questions 2.a et 2.b, cette somme vaut de manière plus explicite

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}\cos\big((2k+1)x\big) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{y\to x^-} f(y) + \lim_{y\to x^+} f(y)\Big).$$

Pour $x = 0$, nous déduisons de la définition de la fonction f que

$$\frac{1}{2}\Big(\lim_{y\to 0^-} f(y) + \lim_{y\to 0^+} f(y)\Big) = \frac{1}{2}\big(1+1\big) = 1.$$

Comme $\cos(0) = 1$, nous arrivons à la formule

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi} = 1,$$

de sorte que la valeur de la série S_1 est égale à

$$S_1 = \frac{\pi}{4}.$$

Sachant que la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ par la question 1.c, le théorème de Parseval assure de façon similaire que la série $|a_0(f)|^2 + 1/2\sum_{n\geq 1}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}$, et que sa somme est égale à

$$|a_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 1.$$

D'après les questions 2.a et 2.b, nous concluons que

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{16}{(2k+1)^2\pi^2}=1,$$

et la série S_2 est donc égale à

$$S_2=\frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 2.

1. Rappelons que la fonction cosinus est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall x\in\mathbb{R},\ -1\leq\cos(x)\leq 1.$$

Sachant que la fonction $y\mapsto 3/(5-4y)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,1]$, par composition, la fonction g est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Comme $z\neq 1/2$ et $z\neq 2$, nous pouvons calculer

$$\frac{2}{2-z}+\frac{1}{2z-1}=\frac{2(2z-1)+2-z}{(2-z)(2z-1)}=\frac{4z-2+2-z}{4z-2z^2-2+z}=\frac{3z}{5z-2z^2-2}.$$

b. Par la formule d'Euler, la fonction g s'écrit

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=\frac{3}{5-2e^{ix}-2e^{-ix}}=\frac{3}{e^{-ix}\big(5e^{ix}-2e^{2ix}-2\big)}=\frac{3e^{ix}}{5e^{ix}-2e^{2ix}-2}.$$

Rappelons alors que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ |e^{ix}|=1,$$

de sorte que $e^{ix}\neq 1/2$ et $e^{ix}\neq 2$. Nous pouvons donc appliquer la question 2.a au nombre $z=e^{ix}$ afin d'obtenir

$$\frac{3e^{ix}}{5e^{ix}-2e^{2ix}-2}=\frac{2}{2-e^{ix}}+\frac{1}{2e^{ix}\big(1-\frac{e^{-ix}}{2}\big)}=\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}}+\frac{e^{-ix}}{2\big(1-\frac{e^{-ix}}{2}\big)}.$$

En conclusion, nous avons établi que

$$g(x)=\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}}+\frac{e^{-ix}}{2\big(1-\frac{e^{-ix}}{2}\big)}.$$

c. Rappelons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u^n=\frac{1}{1-u},$$

quel que soit le nombre $u\in\mathbb{C}$ tel que $|u|<1$. Sachant que $|e^{ix}/2|=1/2<1$ et $|e^{-ix}/2|=1/2<1$, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{ix}}{2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{inx}}{2^n},$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{e^{-ix}}{2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\frac{e^{-ix}}{2}\Big)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{-inx}}{2^n},$$

puis d'après la question 2.b,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} + \frac{e^{-ix}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-inx}}{2^n}.$$

Par le changement d'indice $m = n + 1$, nous calculons

$$\frac{e^{-ix}}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-inx}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-i(n+1)x}}{2^{n+1}} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-imx}}{2^m},$$

ce qui conduit à la formule

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{2^n} + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{-imx}}{2^m} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2^n}.$$

Par la formule d'Euler, nous concluons que

$$g(x) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

3.a. Comme la fonction cosinus est paire sur $\mathbb{R}$, nous pouvons vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(-x) = \frac{3}{5 - 4\cos(-x)} = \frac{3}{5 - 4\cos(x)} = g(x),$$

et la fonction g est également paire sur $\mathbb{R}$. En particulier, ses coefficients de Fourier $(b_n(g))_{n \geq 1}$ sont égaux à

$$\forall n \geq 1,\, b_n(g) = 0.$$

b. Nous vérifions que

$$\forall n \geq 1,\, \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} 1/2^n$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 1} \cos(nx)/2^n$ est bien normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

c. Comme la série trigonométrique $1+2\sum_{n \geq 1} \cos(nx)/2^n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, nous savons qu'elle est identiquement égale à la série de Fourier de sa somme, laquelle est égale à la fonction g par la question 1.c. Il s'ensuit que

$$a_0(g) = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\, a_n(g) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

d. Comme la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$, nous pouvons appliquer le théorème de Parseval afin d'obtenir la formule

$$|a_0(g)|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(|a_n(g)|^2 + |b_n(g)|^2 \Big) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g(x)|^2 \, dx.$$

D'après les questions 3.a et 3.c, cette formule s'écrit

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2^{n-1}} \Big)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{9}{(5 - 4\cos(x))^2} \, dx$$

Par le changement d'indice $m = n - 1$, nous calculons d'une part

$$1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2^{n-1}}\Big)^2 = 1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{1}{4^m} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

D'autre part, nous avons par la formule de Chasles, puis le changement de variable $y = -x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_{-\pi}^{0}|g(x)|^2\,dx + \int_0^{\pi}|g(x)|^2\,dx\Big)\\ &= \frac{1}{2\pi}\Big(\int_0^{\pi}|g(-y)|^2\,dy + \int_0^{\pi}|g(x)|^2\,dx\Big).\end{aligned}$$

Sachant que la fonction g est paire, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|g(x)|^2\,dx = \frac{9}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(5-4\cos(x))^2} = \frac{9I}{\pi}.$$

En conclusion, l'intégrale I vaut

$$I = \frac{\pi}{9}\times\frac{5}{3} = \frac{5\pi}{27}.$$

Exercice 3.

1.a. Comme la suite nulle $(0)_{n\geq 0}$ appartient au sous-ensemble C, ce sous-ensemble de $\ell^2(\mathbb{N})$ n'est pas vide. Considérons alors un nombre $0 \leq \theta \leq 1$, et deux suites $a = (a_n)_{n\geq 0}$ et $b = (b_n)_{n\geq 0}$ de C. Puisque $\ell^2(\mathbb{N})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la suite $\theta a + (1-\theta)b$ reste dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Sachant que

$$\forall n \geq 0,\ |a_n| \leq 1, \quad \text{et} \quad |b_n| \leq 1,$$

nous calculons

$$\big|\theta a_n + (1-\theta)b_n\big| \leq \big|\theta a_n\big| + \big|(1-\theta)b_n\big| = \theta\big|a_n\big| + (1-\theta)\big|b_n\big| \leq \theta + 1 - \theta = 1.$$

La suite $\theta a + (1-\theta)b$ demeure donc dans C, ce qui assure que ce sous-ensemble est convexe.

b. Considérons une suite $(a^{(p)})_{p\geq 0}$ d'éléments de C qui est convergente dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Rappelons que cette propriété équivaut à l'existence d'une suite a^∞ de $\ell^2(\mathbb{N})$ telle que

$$\big\|a^{(p)} - a^\infty\big\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \to 0,$$

lorsque $p \to +\infty$, soit telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big|a_n^{(p)} - a_n^\infty\big|^2 \to 0,$$

dans cette limite. Nous observons que

$$\forall n \geq 0,\ \big|a_n^{(p)} - a_n^\infty\big|^2 \leq \sum_{m=0}^{+\infty}\big|a_m^{(p)} - a_m^\infty\big|^2,$$

de sorte que

$$a_n^{(p)} \to a_n^\infty,$$

quand $p \to +\infty$. Comme

$$\forall p \geq 0,\ |a_n^{(p)}| \leq 1,$$

nous concluons à la limite $p \to +\infty$ que

$$|a_n^\infty| \leq 1.$$

Par conséquent, la suite limite a^∞ appartient au sous-ensemble C, lequel est donc fermé.

2. D'après les questions 1.a et 1.b, C est un sous-ensemble convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$. Le projeté orthogonal $P_C(a)$ est donc bien défini et caractérisé comme l'unique suite de C qui satisfait les inégalités

$$\forall b \in C,\ \big\langle a - P_C(a), b - P_C(a)\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq 0.$$

Considérons la suite $u = (u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0,\ u_n = \begin{cases} a_n \text{ si } |a_n| \leq 1, \\ \frac{a_n}{|a_n|} \text{ sinon,} \end{cases}$$

et observons que

$$|u_n| = \begin{cases} |a_n| \text{ si } |a_n| \leq 1, \\ 1 \text{ si } |a_n| \geq 1. \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \geq 0,\ |u_n| \leq |a_n|,$$

d'où l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient donc à $\ell^2(\mathbb{N})$. Comme

$$\forall n \geq 0, |u_n| \leq 1,$$

elle appartient en fait au sous-ensemble C.

Nous calculons alors

$$\forall b \in C,\ \big\langle a - u, b - u\big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n - u_n)(b_n - u_n).$$

Lorsque $u_n = a_n$, nous avons

$$(a_n - u_n)(b_n - u_n) = 0.$$

Sinon, nous savons que $|a_n| \geq 1$, et par définition,

$$u_n = \begin{cases} 1 \text{ si } a_n \geq 1, \\ -1 \text{ si } a_n \leq -1. \end{cases} \quad .$$

Dans le premier cas, nous obtenons

$$(a_n - u_n)(b_n - u_n) = (a_n - 1)(b_n - 1) \leq 0,$$

puisque $a_n \geq 1$ et $b_n \leq 1$. Dans le second cas, nous avons de même

$$(a_n - u_n)(b_n - u_n) = (a_n + 1)(b_n + 1) \leq 0,$$

puisque $a_n \leq -1$ et $b_n \geq -1$. Il suffit en définitive de sommer les inégalités précédentes pour conclure que

$$\big\langle a - u, b - u \big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} \leq 0.$$

Par la caractérisation du projeté orthogonal $P_C(a)$, la suite u est donc le projeté orthogonal de la suite a sur l'ensemble C.

3.a. Soit $p, q \geq 0$. Nous vérifions que

$$\big\langle e^{(p)}, e^{(q)} \big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n^{(p)} e_n^{(q)} = \begin{cases} 1 \text{ si } p = q, \\ 0 \text{ si } p \neq q, \end{cases}$$

ce qui assure que la famille $(e^{(p)})_{p \geq 0}$ est orthonormée dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Considérons alors une suite $a = (a_n)_{n \geq 0}$ dans l'orthogonal $E = \{e^{(p)}, p \geq 0\}^{\perp}$ de cette famille. Nous notons que

$$\forall p \geq 0,\ a_p = \big\langle a, e^{(p)} \big\rangle_{\ell^2(\mathbb{N})} = 0,$$

de sorte que la suite a est identiquement nulle. L'orthogonal E se réduit donc au singleton $\{0\}$, et nous concluons que la famille $(e^{(p)})_{p \geq 0}$ est totale dans $\ell^2(\mathbb{N})$, donc forme une base hilbertienne de cet espace de Hilbert.

b. Soit $p \geq 0$. Par définition, nous avons

$$\forall n \geq 0,\ |e_n^{(p)}| = 0 \text{ ou } 1 \leq 1,$$

de sorte que la suite $e^{(p)}$ est bien dans C.

c. Considérons une suite $a = (a_n)_{n \geq 0}$ dans l'orthogonal $C^{\perp}$. Comme les suites $e^{(p)}$ sont dans C par la question 3.b, la suite a est orthogonale à toutes ces suites. Sachant que la famille $(e^{(p)})_{p \geq 0}$ est totale, nous en déduisons que la suite a est identiquement nulle, puis que l'orthogonal $C^{\perp}$ se réduit au singleton $\{0\}$.