CY Cergy Paris Université **Analyse de Fourier**
Licence 3 Mathématiques **2022-2023**

Examen

La durée de cet examen est de deux heures. Les trois exercices sont indépendants. L'usage des calculatrices ainsi que de tout autre appareil électronique est interdit.

Questions de cours. (4 points)

1. Donner la définition des coefficients de Fourier complexes $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction f 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2. Donner l'énoncé du théorème de Dirichlet pour une fonction 2π-périodique g sur $\mathbb{R}$.

3. Donner la définition d'un produit scalaire complexe $\langle\ ,\ \rangle$ sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E.

4. Donner l'énoncé du théorème de projection sur un sous-ensemble convexe fermé C d'un espace de Hilbert H.

Exercice 1. (5 points)

Considérons la fonction 2π-périodique f définie par

$$\forall x \in]-\pi,\pi],\ f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| \leq \pi/2, \\ -1 \text{ si } |x| > \pi/2. \end{cases}$$

1.a. Représenter le graphe de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.

b. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

c. Vérifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2.a. Calculer les coefficients de Fourier $(b_n(f))_{n\geq 1}$ de la fonction f.

b. Vérifier que les coefficients de Fourier $(a_n(f))_{n\geq 0}$ de la fonction f sont égaux à

$$\forall k \geq 0,\ \begin{cases} a_{2k}(f) = 0, \\ a_{2k+1}(f) = \frac{4(-1)^k}{(2k+1)\pi}. \end{cases}$$

c. En déduire la valeur des séries

$$S_1 = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1}, \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Exercice 2. (6 points)

Soit

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{3}{5 - 4\cos(x)}.$$

1. Vérifier que la fonction g est bien définie, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.a. Vérifier que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \left\{\frac{1}{2}, 2\right\},\ \frac{3z}{5z - 2z^2 - 2} = \frac{2}{2-z} + \frac{1}{2z-1}.$$

b. En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{1}{1 - \frac{e^{ix}}{2}} + \frac{e^{-ix}}{2\big(1 - \frac{e^{-ix}}{2}\big)}.$$

c. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{2^n}.$$

3.a. Calculer les coefficients de Fourier $(b_n(g))_{n\geq 1}$ de la fonction g.

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire la valeur des coefficients de Fourier $(a_n(g))_{n\geq 0}$ de la fonction g.

d. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{dx}{(5 - 4\cos(x))^2}.$$

Exercice 3. (5 points)

Soit

$$C = \big\{a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N}) \text{ t.q. } \forall n \geq 0, |a_n| \leq 1\big\}.$$

1.a. Vérifier que C est un sous-ensemble convexe non vide de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Le sous-ensemble C est-il fermé ?

2. Déterminer la valeur de la projection orthogonale $P_C(a)$ sur le sous-ensemble C d'une suite $a = (a_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$.

3.a. Pour chaque entier $p \geq 0$, considérons la suite $e^{(p)}$ de $\ell^2(\mathbb{N})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e_n^{(p)} = \begin{cases} 1 \text{ si } n = p, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que la famille $(e^{(p)})_{p\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b. Vérifier que

$$\forall p \geq 0,\ e^{(p)} \in C.$$

c. En déduire l'orthogonal $C^{\perp}$ du sous-ensemble C.