L3 de Mathématiques Année 2020–2021

STRUCTURES LINÉAIRES ET BILINÉAIRES

Examen (session 1) (*durée :* 3h)

Exercice 1 (5 points)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(A - 2I_3)$ et $\det(A - I_3)$.

b) Le polynôme $p_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ est-il annulateur de A ?
Même question pour $p_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$?

c) Donner le polynôme minimal μ_A de A ainsi que son polynôme caractéristique χ_A.

d) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

(1) Trouver tous les $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - 2I_3)u_1 = 0$ et $\langle u_1 | e_1 \rangle = 1$.

(2) Trouver tous les $u_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - 2I_3)u_2 = u_1$ et $\langle u_2 | e_2 + e_3 \rangle = 1$.

(3) Trouver tous les $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - I_3)u_3 = 0$ et $\langle u_3 | e_1 + e_2 \rangle = 1$.

e) En se servant des questions précédentes, trouver une base de jordanisation de A et la forme réduite de Jordan dans cette base.

Réponses.

a) $\det(A - 2I_3) = 0$ et $\det(A - I_3) = 0$.

b) Par calcul direct on obtient $p_1(A) \neq 0$ (p_1 non annulateur de A) et $p_2(A) = 0$ (p_2 est annulateur de A).

c) $\mu_A(\lambda) = -\chi_A(\lambda) = p_2(\lambda)$ (les signes dépendent de la convention adoptée). Ce résultat est une conclusion des questions précédentes, pas besoin de calculer $\chi_A(\lambda)$.

d) On trouve $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) (u_1, u_2, u_3) est une base de jordanisation. La réduite de Jordan dans cette base est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(Attention, l'ordre des blocs de Jordan doit être cohérent avec l'ordre de la base).

Exercice 2 (5 points)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $\phi_1 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $\phi_1(A, B) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BMA)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que ϕ_1 est symétrique.

b) Trouver la matrice de ϕ_1 dans b, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $b = (b_1, \ldots, b_4)$ avec $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Soit $q_2 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $q_2(x) = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 - x_3^2 - x_4^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ de coefficients (x_1, x_2, x_3, x_4). Donner la forme polaire ϕ_2 de q_2 ainsi que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

d) Déterminer la signature de ϕ_1. Est-ce que ϕ_1 est positive ? Non-dégénérée ?

e) Trouver l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ pour ϕ_1.

Réponses.

a) En utilisant le fait que $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}N) = \mathrm{tr}(N)$ pour tout $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on trouve

$$\phi_1(B, A) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}A\, MB) = \mathrm{tr}\left({}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}AMB)\right) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}B\, {}^{\mathrm{t}}MA) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}BMA) = \phi_1(A, B)$$

pour tout $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vu que la matrice M est symétrique. (On pouvait aussi exprimer $\phi_1(B, A)$ en terme des coefficients de B et A dans la base canonique et développer, on obtenait ainsi une formule manifestement symétrique.)

b) On trouve la matrice représentative en calculant les coefficients $\phi_1(b_i, b_j)$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, ce qui donne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) La forme polaire $\phi_2(x, y) = (x_1 + x_3)(y_1 + y_3) + (x_2 + x_4)(y_2 + y_4) - x_3y_3 - x_4y_4$ (on pouvait soit la deviner, soit la calculer avec la formule polaire), et en calculant, on trouve la même matrice représentative que pour ϕ_1.

d) En se servant des questions précédentes on voit que ϕ_2 (et donc ϕ_1) est de signature $(2, 2, 0)$. Donc ϕ_1 n'est pas positive, et ϕ_1 est non-dégénérée.

e) On trouve que $\phi_1(x, b_1) = 0$ et $\phi_1(x, b_2) = 0$ est équivalent à $0 = x_1+x_3$ et $0 = x_1+x_3+x_2+x_4$. Ceci est équivalent à $x_1 = -x_3$ et $x_2 = -x_4$, ce qui permet d'obtenir $(\mathrm{Vect}(b_1, b_2))^{\perp} = \mathrm{Vect}(b_1 - b_3, b_2 - b_4)$.

Exercice 3 (5 points)**.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (à ne pas confondre avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$!) la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

a) Trouver les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A.

b) Justifier que la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

c) Vérifier que le vecteur $u_1 = {}^{\mathrm{t}}(-1, 1, 0)$ est un vecteur de propre de A et préciser la valeur propre. Calculer sa norme $\|u_1\|$ pour le produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ (à ne pas confondre avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$!).

d) Trouver une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A, orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$, telle que $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

e) Montrer qu'il existe une base orthonormée pour $\langle \cdot | \cdot \rangle$, formée de vecteurs propres de B.

Réponses.

a) Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 3$. Un exemple de base de vecteurs propres (les deux premières correspondant à la valeur propre 3, le dernier à 1) est : $u_1 = {}^{\mathrm{t}}(-1, 1, 0)$, $u_2 = {}^{\mathrm{t}}(0, 0, 1)$, $u_3 = {}^{\mathrm{t}}(1, 1, 0)$.

b) A est symétrique et toutes ses valeurs propres sont strictement positives, c'est donc une conclusion du théorème spectral. (On pouvait aussi exprimer la forme quadratique comme somme de carrés.)

c) Par calcul direct on trouve que u_1 est vecteur propre de valeur propre 3. Sa norme $\|u_1\| = \sqrt{\langle u_1 | u_1 \rangle} = \sqrt{6}$ (attention à utiliser le bon produit scalaire).

d) On peut utiliser l'algorithme de Gram–Schmidt, mais il y a beaucoup de simplifications car on trouve $\langle v_1 | u_2 \rangle = 0$, et u_3 est forcément orthogonal à u_1 et u_2. Il suffit donc de normaliser u_2 et u_3 :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

e) Cela suit du théorème spectral si on montre que l'endomorphisme associé à B est symétrique pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (il ne suffit pas de savoir que la matrice B est symétrique !). En effet, pour tout $u, v \in \mathbb{R}^3$ on a

$$\langle u|Bv\rangle = {}^{\mathrm{t}}uABv = {}^{\mathrm{t}}uBAv = {}^{\mathrm{t}}(Bu)Av = \langle Bu|v\rangle,$$

où l'identité $AB = BA$ suit d'un calcul direct, et la troisième identité utilise le fait que B est une matrice symétrique au sens usuel. (On pouvait également remarquer que les vecteurs propres de B sont des vecteurs propres de A et construire la base demandée directement.)

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $n \geq 1$ entier. Supposons que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont des matrices vérifiant $[A, B] = A$ (où $[A, B] = AB - BA$).

a) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$ entier, $[A^k, B] = kA^k$.

b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme donné par $f(M) = [M, B]$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $f(A^k) = kA^k$ pour tout $k \geq 1$ entier. Montrer que A est nilpotent.

On supposera dans la suite que $n = 2$.

c) Soit $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ un polynôme de degré ≤ 2, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant **a)**, exprimer $[p(A), B]$ comme polynôme de A.

d) Soit maintenant $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ le polynôme caractéristique de A. En utilisant le théorème de Cayley–Hamilton et la question **c)**, montrer $2A^2 + bA = 0$.

e) Sans justifier, donner toutes les réduites de Jordan possibles de A. On pourra se servir de **b)**.

Réponses.

a) Le cas $k = 1$ est l'hypothèse $[A, B] = A$. Montrons que si $[A^{k-1}, B] = (k-1)A^{k-1}$ et $[A, B] = A$, alors $[A^k, B] = kA^k$. En effet,

$$[A^k, B] = A^kB - BA^k = A(BA^{k-1} + (k-1)A^{k-1}) - (AB - A)A^{k-1} = (k-1)A^k + A^k = kA^k,$$

où on a utilisé $[A^{k-1}, B] = (k-1)A^{k-1}$ et $[A, B] = A$ pour obtenir la seconde égalité.

b) Par la question précédente, $f(A^k) = [A^k, B] = kA^k$. Si A ne serait pas nilpotent, alors par la question précédente f aurait un nombre infini de valeurs propres, $\{1, 2, 3, \ldots\}$, ce qui est impossible puisque $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) < +\infty$.

c) Vu que $[A^2, B] = 2A$, $[A, B] = A$ et $[I_2, B] = 0$, on obtient $[p(A), B] = 2aA^2 + bA$.

d) Par Cayley–Hamilton, $\chi_A(A) = 0$ et donc aussi $[\chi_A(A), B] = \chi_A(A)B - B\chi_A(A) = 0$. Si on écrit $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$, l'identité $[\chi_A(A), B] = 0$ implique $2A^2 + bA = 0$ en utilisant **c)** avec $a = 1$.

e) On a $A^2 = 0$ donc les réduites de Jordan possibles sont $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.