L3 de Mathématiques Année 2020–2021

Structures linéaires et bilinéaires

Examen (session 1) (*durée :* 3h)

Exercice 1 (5 points). Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Calculer $\det(A - 2I_3)$ et $\det(A - I_3)$.

b) Le polynôme $p_1(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$ est-il annulateur de A ?
Même question pour $p_2(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 1)$?

c) Donner le polynôme minimal μ_A de A ainsi que son polynôme caractéristique χ_A.

d) Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$.

(1) Trouver tous les $u_1 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - 2I_3)u_1 = 0$ et $\langle u_1 | e_1 \rangle = 1$.

(2) Trouver tous les $u_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - 2I_3)u_2 = u_1$ et $\langle u_2 | e_2 + e_3 \rangle = 1$.

(3) Trouver tous les $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tels que $(A - I_3)u_3 = 0$ et $\langle u_3 | e_1 + e_2 \rangle = 1$.

e) En se servant des questions précédentes, trouver une base de jordanisation de A et la forme réduite de Jordan dans cette base.

Exercice 2 (5 points). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, et soit $\phi_1 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $\phi_1(A, B) = \mathrm{tr}({}^t BMA)$ pour tout $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Montrer que ϕ_1 est symétrique.

b) Trouver la matrice de ϕ_1 dans b, la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $b = (b_1, \ldots, b_4)$ avec $b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Soit $q_2 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par $q_2(x) = (x_1 + x_3)^2 + (x_2 + x_4)^2 - x_3^2 - x_4^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^4$ de coefficients (x_1, x_2, x_3, x_4). Donner la forme polaire ϕ_2 de q_2 ainsi que sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

d) Déterminer la signature de ϕ_1. Est-ce que ϕ_1 est positive ? Non-dégénérée ?

e) Trouver l'orthogonal de $\mathrm{Vect}(b_1, b_2)$ pour ϕ_1.

Exercice 3 (5 points). Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Soit $\langle \cdot | \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (à ne pas confondre avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$!) la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est A.

a) Trouver les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A.

b) Justifier que la forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

c) Vérifier que le vecteur $u_1 = {}^t(-1, 1, 0)$ est un vecteur de propre de A et préciser la valeur propre. Calculer sa norme $\|u_1\|$ pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$ (à ne pas confondre avec le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$!).

d) Trouver une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ de vecteurs propres de A, orthonormée pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$, telle que $v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$.

e) Montrer qu'il existe une base orthonormée pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$, formée de vecteurs propres de B.

Exercice 4 (5 points)**.** Soit $n \geq 1$ entier. Supposons que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sont des matrices vérifiant $[A, B] = A$ (où $[A, B] = AB - BA$).

a) Montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$ entier, $[A^k, B] = kA^k$.

b) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'endomorphisme donné par $f(M) = [M, B]$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $f(A^k) = kA^k$ pour tout $k \geq 1$ entier. Montrer que A est nilpotente.

On supposera dans la suite que $n = 2$.

c) Soit $p(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c$ un polynôme de degré ≤ 2, où $a, b, c \in \mathbb{R}$. En utilisant **a)**, exprimer $[p(A), B]$ comme polynôme de A.

d) Soit maintenant $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$ le polynôme caractéristique de A. En utilisant le théorème de Cayley–Hamilton et la question **c)**, montrer $2A^2 + bA = 0$.

e) Sans justifier, donner toutes les réduites de Jordan possibles de A. On pourra se servir de **b)**.