Mai 2019
L3
Mathématiques

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Algèbre linéaire et bilinéaire.

ECRIRE LE NUMERO DE COPIE SUR LE SUJET

Documents et calculatrice interdits. Pas de justification (pour les exercices) = 0 pts

TÉLÉPHONE SORTI DU SAC = EXCLUSION DE L'ÉPREUVE

QCM. Entourer la bonne réponse.

Bonne réponse = +1. Mauvaise réponse = -1. Pas de réponse = 0. La note du QCM ne sera pas inférieure à 0

Rappel. $S_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) | {}^tA = A\}$, $S_n(\mathbb{R})^{++} = \{A \in S_n(\mathbb{R}) | A$ est définie positive$\}$.

(1) Soit $n > 1$ et soit $X = \{B \in S_n(\mathbb{R}) | B^2 = 3I\}$. Alors le cardinal de X est

0 1 2 ∞

(2) Soit $n > 1$ et soit $Y = \{B \in S_n^{++}(\mathbb{R}) | B^2 = 3I\}$. Alors le cardinal de Y est

0 1 2 ∞

(3) Soit q une forme quadratique réelle négative. Alors le noyau de q coincide avec le cône isotrope de q.

VRAI FAUX

(4) La base $\mathscr{B} = (v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ de $\mathbb{C}^3$ est une base de Jordanisation pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

VRAI FAUX

(5) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 6 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\chi_f(x) = (1-x)^6$ et $\mu_f(x) = (x-1)^3$. Alors dans la réduite de Jordan J_f de f il y a deux blocs de Jordan de taille 3 et valeur propre 1 si et seulement si $\dim(\ker(f - id)^2) = 4$.

VRAI FAUX

(6) Soit b une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur $\mathbb{R}^n$ et soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathbb{R}^n = F \oplus F^{\perp_b}$.

VRAI FAUX

TOURNER SVP

QUESTIONS de COURS. *(4 points)*

a) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Définir les sous-espaces caractéristiques (ou sous-espaces propres généralisés) de f.

b) Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que les projecteurs sur les sous-espaces propres généralisés de f (i.e. les projecteurs spectraux) sont des polynômes en f.

c) Énoncer le théorème spectral dans le cas d'un espace euclidien.

Exercice 1. *(5 points)* Soit $A \in M_4(\mathbb{C})$ la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -9 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le polynôme minimal et la réduite de Jordan de A.

b) Donner une base de $\mathbb{C}^4$ qui soit de Jordanisation pour A.

c) Donner la décomposition de Dunford de A et calculer, pour tout $r \geq 1$, la puissance A^r.

d) Soit $B \in M_4(\mathbb{C})$ une matrice telle que $\chi_B = \chi_A$ et $\mu_B = \mu_A$. Est-est elle équivalente à A? *Justifier.* Est-elle semblable à A? *Justifier.*

Exercice 2. *(2 points)* Soit $n > 1$. Calculer toutes les matrices symétriques réelles A de taille n définies negatives qui vérifient

$$A^5 = -A^4 + 2A^3 + 2A^2 - A - I.$$

Justifier.

Exercice 3. *(2 points)* Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Démontrer que $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si il existe une matrice inversible $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tBB$.

Exercice 4. *(3 points)*

a) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension 9 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\chi_f(x) = -(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2, \qquad \mu_f(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3).$$

Quelles sont les possibles réduites de Jordan de f? *Justifier.*

b) Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n et soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\chi_f(x) = (-1)^n \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i} = (-1)^n \mu_f(x).$$

Quelle est la réduite de Jordan de f? *Justifier.* Quelle est, pour chaque i, la dimension de E_{λ_i}? *Justifier.*