**Mai 2018**
**L3**
**Mathématiques**

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

---

## Algèbre linéaire et bilinéaire. Sujet A.

---

**Aucun document autorisé, calculatrice interdite.**

**Pour les exercices une réponse non justifiée n'est pas prise en compte**

**TÉLÉPHONE SORTI DU SAC = EXCLUSION DE L'ÉPREUVE**

**SUJET POSÉ SUR LE CÔTÉ, CÔTÉ QCM = EXCLUSION DE L'ÉPREUVE**

**Exercice 1.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où $E$ est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $K$. Soit $p(x) = p_1(x)p_2(x) \in K[x]$ avec $p_1(x)$ et $p_2(x)$ premiers entre eux et de degré positif. Démontrer que
$$\mathrm{Ker}(p(f)) = \mathrm{Ker}(p_1(f)) \oplus \mathrm{Ker}(p_2(f)).$$

**Exercice 2.**

**a)** Si $n \geq 2$ et $\lambda$ est un nombre complexe fixé, démontrer qu'il existe un nombre infini de matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = \lambda I_n$.

**b)** Supposons $A$ diagonalisable, donc
$$E = \mathbb{C}^n = \oplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(A) \qquad n_i := dim_{\mathbb{C}} E_{\lambda_i}(A).$$
Démontrer que si $B \in M_n(\mathbb{C})$ est telle que $B^2 = A$ alors $B(E_\lambda(A)) \subseteq E_\lambda(A)$. En déduire que dans ce cas il existe une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que:

$P^{-1}BP$ est une matrice diagonale par blocs avec blocs diagonaux de taille $n_i$

$P^{-1}AP$ est une matrice diagonale par blocs avec blocs diagonaux $\lambda_1 I_{n_1}, ..., \lambda_r I_{n_r}$.

**c)** Démontrer que si $\chi_A(x)$ a racines simples alors tout $B \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $B^2 = A$ est diagonalisable.

**d)** Démontrer que si $\chi_A(x)$ a racines simples il y a un nombre fini non nul de matrices $B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $B^2 = A$.

**e)** Si $n = 2$, trouver une matrice $A \in M_2(\mathbb{C})$ pour laquelle l'équation $B^2 = A$ n'admet pas de solution.

**f)** Soit $\lambda > 0$ un nombre réel. Demontrer qu'il existe une unique matrice symétrique définie positive $B \in S_n(\mathbb{R})^{++}$ telle que $B^2 = \lambda I$.

**g)** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})^{++}$. Démonter qu'il existe une unique matrice $B \in S_n(\mathbb{R})^{++}$ telle que $B^2 = A$.

TOURNER SVP

**QCM. ENTOURER la bonne réponse.**
**Bonne réponse = +1,25. Mauvaise réponse = -0,25 (sauf question k)**

**h)** Les matrices $A, B \in M_3(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

sont

équivalentes et semblables    ni équivalentes ni semblables    équivalentes mais pas semblables

**i)** Les matrices $A, B \in M_3(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont congruentes.

VRAI    FAUX

**j)** Les matrices $A, B \in M_3(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

sont congruentes.

VRAI    FAUX

**k)** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Une base de Jordanisation de $A$ est:

$\mu_A(x) =$

**l)** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 6 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Lequel de deux cas est-il possible?

$\mu_f(x) = (x-2)^5$ et $\dim(E_2(f)) = 3$    $\mu_f(x) = (x-2)(x-3)^2$ et $\dim(E_2(f)) = 3$

**m)** La base $\mathscr{B} = (v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$ de $\mathbb{C}^3$ est une base de Jordanisation pour la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

VRAI    FAUX

**n)** Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ telle que il existe $p \in \mathbb{N}$ et $A^p = 0$. Alors $A = 0$.

VRAI    FAUX

**o)** Soit $E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 8 et soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Lequel de deux cas est-il possible?

$E$ peut s'écrire comme la somme directe de deux sous-espaces $f$-stables de dimension 4 mais aucun bloc de la réduite de Jordan de $f$ a taille plus grande que 3.

$E$ peut s'écrire comme la somme directe de deux sous-espaces $f$-stables de dimension 4 et dans la réduite de Jordan de $f$ il y a un bloc de taille 5.

**p)** Toute matrice symétrique réelle peut s'écrire comme la différence de deux matrices symétriques réelles définies positives.

VRAI    FAUX

**q)** Soit $a \in \mathbb{C}, 3 \leq n \in \mathbb{N}$. Le nombre de sous-espaces $J_n(a)$-stables de $\mathbb{C}^n$ différents de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$ est

0    1    $n-1$