L3 Mathématiques
Printemps 2017
Algèbre Linéaire

Examen du 22 juin 2016

Durée 2h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Tout résultat non justifié sera noté zéro

Exercice 1: On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les polynômes caractéristique et minimal de A. La matrice A, est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer la réduite de Jordan de A et donner une base de Jordan pour cette matrice.

Exercice 2: Soit $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forme quadratique définie par $q(x, y, z) = x(x + y + z)$.

1. Ecrire la matrice de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer sa signature, son rang, son noyau et une base q-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $v = (1, 1, 1)$ et $F = vect(v)$, l'espace vectoriel engendré par v. Déterminer $F^\perp$ et $F^{\perp\perp}$.

3. Déterminer le cône isotrope $C(q)$ de q et produire une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs isotropes. Est-ce que $C(q)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 3: Soit $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, u un vecteur unitaire de E ($\|u\| = 1$) et a un réel. On considère l'endomorphisme $f_a : E \to E$ défini par

$$f_a(v) = v + a\langle v, u\rangle u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme auto-adjoint, c'est à dire vérifiant

$$\forall v, w \in E \quad \langle f_a(v), w\rangle = \langle v, a(w)\rangle.$$

   Déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres et son polynôme minimal.

2. Montrer qu'il existe un unique $a' \neq 0$ tel que $f_{a'}$ soit une isométrie, c'est à dire vérifiant

$$\forall v \in E, \quad \|f_{a'}(v)\| = \|v\|.$$

Exercice 4: Montrer que la matrice $M = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ est symétrique définie positive. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs propres de M. Trouver S, une matrice symétrique définie positive telle que $S^2 = M$.