L3 Mathématiques
Printemps 2017
Algèbre Linéaire

---

**Examen du 4 mai 2017**

---

**Durée 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé**

Des réponses non justifiées ne sont pas prises en compte

**Notation :** Dans tout le sujet $\mathcal{S}_n^+ \in M_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++} \in M_n(\mathbb{R})$) notera l'ensemble des matrices réelles symétriques positives (respectivement définies positives) de taille $n$.

**Exercice 1:** Soit $E = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R}) |\ a - d = 0 \right\}$ et $J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. On définit la forme quadratique

$$\begin{aligned} q: \quad E &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \quad \mathrm{Tr}(MJM) \end{aligned}$$

où pour tout $A \in E$, $\mathrm{Tr}(A)$ est la trace de la matrice $A$.

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de $E$ et déterminer la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la forme quadratique $q$.
2. Déterminer la signature de $q$, son rang, son noyau et son cône isotrope. Déterminer une base $q$-orthogonale de $E$. La forme $q$ est-elle définie ? positive ? négative ?
3. Déterminer $F^\perp$ où $F = \{ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \in M_2(\mathbb{R}) |\ a \in \mathbb{R} \}$.

**Exercice 2:** Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{S}_n^+$ vérifiant $A^5 + A^4 - 2A^3 + A^2 = I_n$.

**Exercice 3:** Notons $J_n(\lambda) \in M_n(\mathbb{C})$ le bloc de Jordan de valeur propre $\lambda$ et de taille $n$,

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. (a) Donner la réduite de Jordan et une base de Jordan de la matrice $J_3(1)^2$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \neq 0$. Donner la réduite de Jordan de $J_n(\lambda)^2$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \neq 0$ et soit $A = J_n(\lambda)^2 - \lambda^2 I_n$. Démontrer que $e_n \notin \ker A^{n-1}$. En déduire une base de Jordan de $J_n(\lambda)^2$.
2. (a) Donner la réduite de Jordan puis une base de Jordan de $J_4(0)^2$ et $J_5(0)^2$.
   (b) Déterminer la réduite de Jordan de $J_n(0)^2$.

**Exercice 4:** Soit $A = \begin{pmatrix} a_{n-1} & 1 & & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, autrement dit $A = \sum_{i=1}^n a_{n-i} E_{i,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$.

1. Montrer que $\chi_A(X) = (-1)^n (X^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i)$.
2. Déterminer $A^k(e_n)$ pour $k = 1, \dots, n-1$ et en déduire $\mu_A$.
3. Soit $p(X) = (X^2 + 1)(X^2 + X + 1)$.
   (a) Trouver une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ dont le polynôme minimal est $p(X)$.
   (b) Montrer qu'il ne peut pas exister une matrice $A \in M_5(\mathbb{R})$ telle que $\mu_A(X) = p(X)$.

**Exercice 5:** Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique.

1. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}$) si et seulement si toutes les valeurs propres de $A$ sont positives (respectivement strictement positives).

2. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que $M$ appartient à $S_n^{++}$ et trouver une $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $S^2 = M$. Est-elle unique ?

3. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et soit $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}$ telles que $A^k = B^k$. Montrer que $A = B$.

**Exercice 6:** Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Supposons qu'il existe $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $A^l \in \mathcal{S}_n^{++}$.

1. Que peut-on dire sur le polynôme minimal de $A^l$ ? En déduire un polynôme annulateur de $A$.

2. Montrer que $A$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

**Exercice 7:** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n$, $H$ un hyperplan de $E$ (autrement dit un sous-espce vectoriel de dimension $n-1$) et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f \neq Id_E \qquad \text{et} \qquad \forall v \in H, \quad f(v) = v$$

Déterminer la réduite de Jordan dans les deux cas : $\det f = 1$ ou $\det f \neq 1$.