Ex1

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&3&0&0\\-1&1&1&1\\-1&1&-1&3\end{pmatrix}$$

1. $\chi_A(X)=\begin{vmatrix}1-X&1&0&0\\-1&3-X&0&0\\-1&1&1-X&1\\-1&1&-1&3-X\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-X&1\\-1&3-X\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}1-X&1\\-1&3-X\end{vmatrix}=[(1-X)(3-X)+1][(1-X)(3-X)+1]=(X^2-4X+4)(X^2-4X+4)$

$=(X-2)^2(X-2)^2$

$$\boxed{\chi_A(X)=(X-2)^4}$$

Nous avons 4 choix pour μ_A : $(X-2)$; $(X-2)^2$; $(X-2)^3$ ou $(X-2)^4$

$(A-2I)\neq 0$ donc $X-2$ n'est pas le polynôme minimal de A.

$(A-2I)^2=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&-1&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&-1&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ donc $\boxed{\mu_A(X)=(X-2)^2}$

La matrice A n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal, μ_A n'est pas à racines simples.

2. Puisque 2 est la seule valeur propre de A, les seuls blocs de Jordan sont de forme $J_k(2)$

$\dim \operatorname{Ker}(A-2I)=4-\operatorname{rg}(A-2I)=2$. donc la réduite de Jordan de A a 2 blocs. En plus $\mu_A(X)=(X-2)^2$, donc 2 est la taille max'l des blocs. On en déduit que la réduite de Jordan de A admet deux blocs chacun de taille 2 : $\boxed{J_A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}}$

On détermine $\operatorname{Ker}(A-2I)^k$: $\operatorname{ker}(A-2I)=\operatorname{ker}\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&1&-1&1\\-1&1&-1&1\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\middle| -x+y=0 \text{ et } -z+t=0\right\}$

$\operatorname{Ker}(A-2I)=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ et $\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(A-2I)$

une base de Jordan est donc : $\left((A-2I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},(A-2I)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$\boxed{\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)}$$

Ex2

$q(x,y,z)=x(x+y+z)$

1. $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$: $\boxed{M_{\mathcal{B}}(q)=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\\frac12&0&0\\\frac12&0&0\end{pmatrix}}$

$q(x,y,z)=x^2+x(y+z)$

$=x^2+x(y+z)+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$ donc $\boxed{\operatorname{Sgn}(q)=(1,1)\ ;\ \operatorname{rg}(q)=2}$

$\operatorname{Ker} q$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ t.q $x+\frac{y+z}{2}=0$ ET $\frac{y+z}{2}=0$: $\boxed{\operatorname{Ker} q=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}$

$X=x+\frac{y+z}{2}$

$Y=\frac{y+z}{2}$

$Z=z$

$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\0&\frac12&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\0&\frac12&\frac12\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{Une base } q\text{-orthogonale est } \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right)}$$

2. Soit b la forme polaire de q. On veut chercher $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ t.q. $b\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)=0$. Utilisant la matrice de q cela est équivalent à $(x,y,z)\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&0\\ \frac12&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$ qui donne $0=(x,y,z)\begin{pmatrix}2\\ \frac12\\ \frac12\end{pmatrix}=2x+\frac{y+z}{2}=0$

c-a-d $x=-\frac{y}{4}-\frac{z}{4}$

$$\boxed{F^{\perp}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right\}}$$

$F^{\perp\perp}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid b\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}\right)=0 \text{ ET } b\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}\right)=0\right\}$ On calcule : $(x,y,z)\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&0\\ \frac12&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\\0\end{pmatrix}=0$

donne : $(x,y,z)\begin{pmatrix}1\\-\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}=x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=0 \Rightarrow x=\frac12(y+z)$

$(x,y,z)\begin{pmatrix}1&\frac12&\frac12\\ \frac12&0&0\\ \frac12&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}=0$ donne $(x,y,z)\begin{pmatrix}1\\-\frac12\\-\frac12\end{pmatrix}=x-\frac{y}{2}-\frac{z}{2}=0 \Rightarrow x=\frac12(y+z)$

Donc $\boxed{F^{\perp\perp}=\mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}\frac12\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac12\\0\\1\end{pmatrix}\right\}}$

3. $C(q)$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ t.q $q(x,y,z)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2-\left(\frac{y+z}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{y+z}{2}\right)^2=\left(\frac{y+z}{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow x+\frac{y+z}{2}=\frac{y+z}{2}$ ou $x+\frac{y+z}{2}=-\frac{y+z}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=0 \text{ ou } x+y+z=0}$

$\boxed{\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée des vects isotropes

Non $C(q)$ n'est pas un ss-e.v. de $\mathbb{R}^3$ car $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\notin C(q)$ m si $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\in C(q)$ est $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\in C(q)$.

Ex3 $f_a(v)=v+a\langle v,u\rangle u$ où $a\in\mathbb{R}$ et $\|u\|=1$

1. $\langle f_a(v),w\rangle=\langle v+a\langle v,u\rangle u,w\rangle=\langle v,w\rangle+a\langle v,u\rangle\langle u,w\rangle$

$\langle v,f_a(w)\rangle=\langle v,w+a\langle w,u\rangle u\rangle=\langle v,w\rangle+a\langle w,u\rangle\langle v,u\rangle$

Puisque $\langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$ et $\langle u,w\rangle=\langle w,u\rangle$ on a que f_a est auto-adjoint.

Si $v\in \mathrm{vect}\{u\}^{\perp}$ alors $\langle v,u\rangle=0$ et donc $f_a(v)=v$. On déduit que

1 est valeur propre de f_a, de ss-esp. propre $\mathrm{Vect}\{u\}^{\perp}$ de dimension $n-1$

$f_a(u)=u+a\langle u,u\rangle u=(1+a)u$. On a alors

$1+a$ est valeur propre de f_a de ss-esp propre $\mathrm{vect}\{u\}$ qui est de dim 1

$\mu_{f_a}(X)=(X-1)(X-1-a)$ si $a\neq 0$ et $\mu_{f_a}(X)=X-1$ si $a=0$

2.

On veut $\langle f_a(v),f_a(v)\rangle=\langle v,v\rangle$. c-à-d $\forall v$

$\langle v,v\rangle=\langle v+a\langle v,u\rangle u,v+a\langle v,u\rangle u\rangle=\langle v,v\rangle+a\langle v,u\rangle\langle v,u\rangle+a\langle v,u\rangle\langle u,v\rangle+a^2\langle v,u\rangle^2\langle u,u\rangle$

$=\langle v,v\rangle+2a\langle v,u\rangle^2+a^2\langle v,u\rangle^2$

$\Leftrightarrow a\langle v,u\rangle^2(2+a)=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $\boxed{a=-2}$

Ex4 M étant déjà symétrique, il faut juste calculer les valeurs propres de M:

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & 1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 1 & 2-X & -1+X \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 0 \\ 2 & 3-X & 0 \\ 1 & 1 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)\left((2-X)(3-X)-2\right)$$

$$= (1-X)(X^2-5X+4) = -(X-1)(X-4)(X-1) = -(X-1)^2(X-4)$$

les valeurs propres étant >0 on a que M est définie positive.

$E_4 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_1 = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est le plan $x+y+z=0$

appliquant Gram schmidt sur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on obtient $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ une b.o.n des vect. pr de M

Notons $O = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ donc ${}^tOMO = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{S = O\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^tO}$ est sym définie positive tq $S^2 = M$.