L3 Mathématiques
Printemps 2016
Algèbre Linéaire

Examen du 4 mai 2016

Durée 3h00. Aucun document ni calculatrice autorisé
Tout résultat non justifié sera considéré comme zéro

Exercice 1: Soit A la matrice réelle

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les polynômes caractéristique et minimal de A.

2. Déterminer la réduite de Jordan et une base de Jordan de A.

3. Donner une matrice de $M_4(\mathbb{R})$ avec les mêmes polynômes caractéristique et minimal que A, mais qui ne soit pas semblable à A. Justifier.

Exercice 2: Soit A une matrice réelle symétrique de taille $n \geq 1$ telle que $A^3 = A^2 + A - I$.

1. Donner un polynôme annulateur de A. En déduire le polynôme minimal de A.

2. Montrer que l'inverse de A est A.

Exercice 3: Soit $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace vectoriel euclidien et W un sous-espace vectoriel non nul de V. On suppose aussi que $W \neq V$. Donc on rappelle que $V = W \oplus W^{\perp}$.

Pour tout $x \in V$, on appelle la symétrie orthogonale par rapport à W, l'endomorphisme

$$s(x) = y - z \quad \text{où } x = y + z \quad \text{avec } y \in W \text{ et } z \in W^{\perp}.$$

1. En calculant $\langle s(x), x' \rangle$ et $\langle x, s(x') \rangle$, montrer que s est un endomorphisme auto-adjoint. Prouver que s est une isométrie aussi. En déduire que les seules valeurs propres de s sont 1 ou -1. Déterminer son polynôme minimal.

2. Si $V = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et W le sous-espace des vecteurs (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Trouver une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ des vecteurs propres de s.

Exercice 4: Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ tel que

$$f(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, n-1 \quad \text{et } f(e_n) = e_1$$

Autrement dit $f(e_i) = e_l$ où $l = i + 1 \bmod n$. Notons $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ et pour $k \geq 1$ $f^k = f^{k-1} \circ f$.

1. Déterminer $f^k(e_i)$ pour $k = 1, \ldots, n$ et pour tout $i = 1, \ldots, n$.

2. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$. Ecrire C et calculer C^n. En déduire que C est diagonalisable.

3. Démontrer que C^k sont diagonalisables dans la même base de diagonalisation que C.

4. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & \ddots & a_3 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & \vdots & \ddots & a_0 & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

On note $\omega = \exp(\frac{2\pi i}{n})$. Soit le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Démontrer que M est semblable à la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} P(1) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & P(\omega) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & P(\omega^{n-1}) \end{pmatrix}.$$

5. Application: Montrer que la matrice symétrique suivante est positive. On rappellera la définition de matrice symétrique positive.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Exercice 5: Notons $J_{\lambda,l} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C})$ le bloc de Jordan

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_l(\mathbb{C}).$$

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $m > 0$. Le but de cette partie du problème est de montrer que si A^m est diagonalisable, alors dans la réduite de Jordan J_A de A, les seuls blocs de taille strictement supérieure à 1 sont du type $J_{0,l}$ avec $1 < l \leq m$.

   a. Soit $A = J_{0,l}$ avec $l > 1$. Montrer que pour tout i, $1 \leq i < l$, A^i n'est pas diagonalisable, mais A^l est diagonalisable.

   b. Soit $A = J_{\lambda,l}$ avec $\lambda \neq 0$ et $l > 1$. Si A^m est diagonalisable, montrer que $X^m - \lambda^m$ est un polynôme annulateur de A. Trouver une contradiction.

   c. Conclure pour toute matrice A, en utilisant le théorème de Jordan.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que si A^m est diagonalisable, alors A^{m+1} est diagonalisable aussi.