Exercice 1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

① $\chi_A(X) = \det(A - XI_4) = \boxed{X^4}$

Puisque μ_A divise χ_A, on a $\mu_A(X) = X$ ou X^2 ou X^3 ou X^4

$A \neq 0$ donc $\mu_A(X) \neq X$ mais $A^2 = 0$ donc $\boxed{\mu_A(X) = X^2}$

② $rg(A) = 2$, donc $\dim \operatorname{Ker} A = 2$. Donc J_A admet 2 blocs de Jordan.

On sait aussi que $\mu_A(X) = X^2$, donc la taille max'l des blocs de Jordan de A est 2. On en déduit que

$$\boxed{J_A = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)}$$

On a $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \subsetneq \operatorname{Ker} A \subsetneq \operatorname{Ker} A^2 = \mathbb{R}^4$

$$\operatorname{Ker} A = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} / A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{matrix} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\ker A = \operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

On prend un ss-e.v. supplémentaire de $\operatorname{Ker} A$, p. ex $F = \operatorname{Vect}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=v_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=v_2}\right\}$: $\mathbb{R}^4 = F \oplus \operatorname{Ker} A$

Donc une bas de Jordan est $\boxed{(Av_1, v_1, Av_2, v_2)}$ c-à-d $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$

③ $B = \left(\begin{array}{cc|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{array}\right)$ A et B sont semblables ssi (à permutation des blocs près) elles ont la m̂ forme de Jordan. B a 3 blocs, mais A 2 blocs

Exercice 2

① $A^3 = A^2 + A - I$. Donc $P(X) = X^3 - X^2 - X + 1$ est un polynôme annulateur de A.

μ_A divise tout polynôme annulateur de A

$$P(X) = X^2(X-1) - (X-1) = (X-1)(X^2-1)$$

$$P(X) = (X-1)^2(X+1)$$

Or A est symétrique, donc elle est diagonalisable. Donc μ_A est à racines simples

$$\boxed{\mu_A(X) = (X-1) \text{ ou } (X+1) \text{ ou } (X-1)(X+1)}$$

② $\mu_A(X) = X - 1$, donc $A = I_n \Rightarrow A^{-1} = A$

$\mu_A(X) = X + 1 \Longrightarrow A = -I_n \Rightarrow A^{-1} = A$

$\mu_A(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1 \Rightarrow A^2 - I_n = 0 \quad A = A^{-1}$

Exercice 3

1. $x = y + z$ et $x' = y' + z'$ avec $y, y' \in W$ et $z, z' \in W^\perp$

On a $s(x) = y - z$ et $s(x') = y' - z'$

$$\langle s(x), x' \rangle = \langle y - z, y' + z' \rangle = \langle y, y' \rangle + \langle y, z' \rangle - \langle z, y' \rangle - \langle z, z' \rangle$$

Or $y \in W$ et $z' \in W^\perp$ donc $\langle y, z' \rangle = 0$ et $y' \in W$ et $z \in W^\perp$ donc $\langle z, y' \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle s(x), x' \rangle = \langle y, y' \rangle - \langle z, z' \rangle$

De m : $\langle x, s(x') \rangle = \langle y + z, y' - z' \rangle = \langle y, y' \rangle - \langle y, z' \rangle + \langle z, y' \rangle - \langle z, z' \rangle$

$$= \langle y, y' \rangle - 0 + 0 - \langle z, z' \rangle$$

Donc $\forall x, x' \in V$ $\langle x, s(x') \rangle = \langle s(x), x' \rangle \Rightarrow s$ est auto-adjoint.

$$\langle s(x), s(x') \rangle = \langle y - z, y' - z' \rangle = \langle y, y' \rangle - \overbrace{\langle y, z' \rangle}^{=0} - \overbrace{\langle z, y' \rangle}^{=0} + \langle z, z' \rangle = \langle y, y' \rangle + \langle z, z' \rangle$$

$$\langle x, x' \rangle = \langle y + z, y' + z' \rangle = \langle y, y' \rangle + \underbrace{\langle y, z' \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle y', z \rangle}_{=0} + \langle z, z' \rangle = \langle y, y' \rangle + \langle z, z' \rangle$$

$\langle s(x), s(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \Rightarrow s$ est une isométrie

Soit $x \neq 0_V$ vect. pr. de s de valeur propre λ : $s(x) = \lambda x$. Alors, puisque s est une isométrie $\langle s(x), s(x) \rangle = \langle x, x \rangle \Rightarrow \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \langle x, x \rangle \Rightarrow (\lambda^2 - 1) \underbrace{\langle x, x \rangle}_{\neq 0} = 0$

$\boxed{\lambda = \pm 1}$

s est auto-adjoint, donc diagonalisable $\Rightarrow$ $\boxed{\mu_s(X) = (X-1)(X+1)}$

2. $\forall y \in W$ $s(y) = y$ et $\forall z \in W^\perp$ $s(z) = -z$. Donc le ss-esp propre de s de val. pr 1 est W et le ss-esp pr. de s de val. pr -1 est $W^\perp$.

$W = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ et $W^\perp = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. On fait Gram-Schmidt sur les vecteurs

$v_1 = (1, -1, 0)$, $v_2 = (1, 0, -1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$. Et on obtient

$\varepsilon_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\varepsilon_2' = v_2 - \langle v_2, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\varepsilon_3' = v_3 - \langle v_3, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1 - \langle v_3, \varepsilon_2 \rangle \varepsilon_2 = v_3 \Rightarrow \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Donc une b.o.n des vect. pr de s est $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)}$

Exercice 4

1) $f^k(e_i) = e_\ell$ où $\ell \equiv i+k\ [n]$. La dém est par récurrence sur k

initialisation $k=0$, alors $f^0 = id_{\mathbb{C}^n}$ et $f^0(e_i) = e_i$ ✓

hérédité Supposons $f^k(e_i) = e_\ell$ où $\ell \equiv i+k\ [n]$

$$f^{k+1}(e_i) = f\circ f^k(e_i) = f\left(f^k(e_i)\right) = f(e_\ell) \text{ où } \ell \equiv i+k\ [n]$$
$$= e_m \text{ où } m \equiv \ell+1\ [n]$$

Donc $m \equiv \ell+1 \equiv i+(k+1)\ [n]$ ✓

2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad C^n(e_i) = f^n(e_i) = e_\ell$ où $\ell \equiv i+n\ [n] \Rightarrow \ell = i$

$C^n(e_i) = e_i \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow C^n = I_n$

$P(X) = X^n - 1$ est un polynôme annulateur de C. Or ce polynôme a n racines distinctes : $\exp(2\ell\pi i/n)$ où $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ les n-ème racines d'unité.

Or C admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Donc C est diagonalisable.

3) C est diagonalisable. Donc $\exists P$ inversible t.q. $P^{-1}CP = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} = D$ diagonale

$P^{-1}C^kP = (P^{-1}CP)^k = D^k = \begin{pmatrix}\lambda_1^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^k\end{pmatrix}$ est diagonale. Donc C est diagonalisable.

4) $M = a_0 I_n + a_1 C + a_2 C^2 + \dots + a_{n-1} C^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k C^k$

$P^{-1}MP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P^{-1}C^kP = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k$. les val. propres de C sont $\lambda_\ell = \exp(2\ell\pi i/n) = \omega^\ell$

Donc $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_\ell^k = P(\lambda_\ell) = P(\omega^\ell)$

5) $M = I_n - \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}C^{n-1}$. Donc $P(X) = -\frac{1}{2}X^{n-1} - \frac{1}{2}X + 1$

Puisque $\omega^n = 1$, $\omega^{n-1}.\omega = 1 \Rightarrow \omega^{n-1} = \omega^{-1} = \overline{\omega}$ $\quad$ et $\omega^\ell = \cos\frac{2\ell\pi}{n} + i\sin\frac{2\ell\pi}{n}$

$P(\omega^\ell) = -\frac{1}{2}\overline{\omega}^\ell - \frac{1}{2}\omega^\ell + 1 = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\ell\pi}{n} - \cancel{i\sin\frac{2\ell\pi}{n}} + \cos\frac{2\ell\pi}{n} + \cancel{i\sin\frac{2\ell\pi}{n}}\right) + 1$

$= 1 - \cos\frac{2\ell\pi}{n} \geqslant 0$

les val. pr de M sont $\geqslant 0$ donc M est une matrice symétrique $\geqslant 0$

Exercice 5

1.a $A = J_\ell(0)$. Donc A est nilpotent. Donc A^i est nilpotent $\forall i \geq 1$.
Une matrice nilpotente est diagonalisable ssi elle est 0.
Puisque $A = J_\ell(0)$, on a $\mu_A(X) = X^\ell$. Donc $A^i = 0$ ssi $i \geq \ell$. Donc A^i est diagonalisable ssi $i \geq \ell$

1.b $A = J_\ell(\lambda)$ avec $\lambda \neq 0$ et $\ell > 1$. Or $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ donc $A^m = \begin{pmatrix} \lambda^m & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda^m \end{pmatrix}$

Donc λ^m est la seule valeur propre de A^m. Donc si A^m était diagonalisable, on aurait $\mu_{A^m}(X) = X - \lambda^m \Longrightarrow A^m - \lambda^m I_\ell = 0 \Longleftrightarrow X^m - \lambda^m$ polynôme annulateur de A
Mais ce polynôme a n racines distinctes, qui impliquerait A diagonalisable et donc $A \neq J_\ell(\lambda)$ avec $\ell > 1$

1c Soit J_A la forme de Jordan de A formée des blocs $J_\ell(\lambda)$ sur la diagonale
Si A^m est diagonalisable Alors $(J_\ell(\lambda))^m$ diagonalisable aussi, donc soit $\lambda = 0$ et $\ell \leq m$ ou $\lambda \neq 0$ et $\ell = 1$

2 A^m diagonalisable, alors $J_A = \begin{pmatrix} J_{\ell_1}(0) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & J_{\ell_s}(0) & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$ avec $\ell_i \leq m$ alors A^{m+1} est semblable

à $J_A^{m+1} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \lambda_1^m & \\ & & & \ddots \\ & & & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$ diagonale