

Contrôle du Vendredi 21 juin 2019, session 2

Téléphone, calculatrice et document interdit à l'exception d'une feuille A4 recto manuscrite au choix de l'étudiant. Barème indicatif : 8+6+6

Exercice 1 : Petites questions proche du cours

1. En coordonnées sphériques, décrire la surface S d'équation $\theta = \frac{\pi}{6}$.
2. Vérifier la formule $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$ sur l'exemple suivant $\varphi(x, y) = x + y$ et $\psi(x, y) = x^2 + y^2$, on calculera explicitement chacun des 3 termes.
3. Soit a une fonction scalaire, y_1 une solution de (E_1) l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y(x) = x^2$, et y_2 une solution de l'équation différentielle (E_2) $y''(x) + a(x)y(x) = x^3$. déterminer une solution de l'équation différentielle (E) $y''(x) + a(x)y(x) = 5x^2 - x^3$
4. Soit T le triangle de sommets $A : (0; -2)$, $B : (0; 2)$ et $C : (1; 0)$. Représenter T , puis calculer l'intégrale

$$I = \iint_T x \, dx \, dy$$

Exercice 2 : Soit $\Sigma = \{\Phi(u, v) \in \mathbb{R}^3 / u, v \in \mathbb{R}\}$ la surface définie comme l'image de Φ avec

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \mapsto \left(\frac{u}{u^2+v^2}; \frac{v}{u^2+v^2}; \frac{1}{u^2+v^2} \right) \end{cases}$$

1. Le point $(1; 1; 1)$ appartient-il à Σ ?
2. Le point $(1; 1; 2)$ appartient-il à Σ ?
3. Écrire Φ comme le noyau d'un champ scalaire (c'est à dire sous forme d'équation).
4. Déterminer le plan tangent à Σ en $(1; 1; 2)$.

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles et l'EDP suivantes

$$(E_1) \quad y''' + y'' - 2y = x$$

$$(E_2) \quad 5 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) = x$$