Mathematiques de l'ingenieur 31 Mars 2017.

Exercice 1. (E') : $y'' + ay' + by = 0$.

$y_0 + z$ est sol de $E \iff (y_0+z)'' + a(y_0+z)' + b(y_0+z) + c = 0$

$\iff \underbrace{y_0'' + a y_0' + b y_0 + c}_{=0 \text{ car } y_0 \text{ est solution de } (E)} + z'' + az' + bz = 0.$

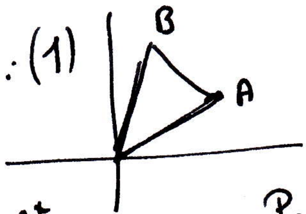
$\iff z$ solution de (E').

Exercice 2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad \Psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$

$$\nabla . \varphi\Psi = \operatorname{div}\begin{pmatrix} \varphi\Psi_1 \\ \varphi\Psi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial x}(\varphi\Psi_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\Psi_2) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Psi_1 + \varphi\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\Psi_2 + \varphi\frac{\partial\Psi_2}{\partial y}$$

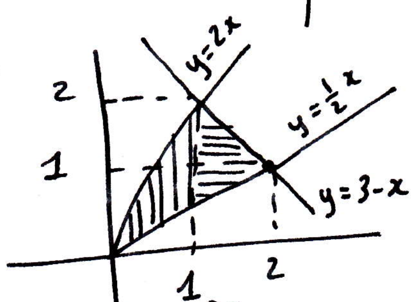
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}.\Psi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}.\Psi_2 + \varphi\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_2}{\partial y}\right) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\varphi . \Psi + \varphi \operatorname{div}\Psi = \nabla\varphi.\Psi + \varphi\nabla.\Psi$$

Exercice 3 : (1)



$\text{Aire}(OAB) = \frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{3}{2}.$

(2)

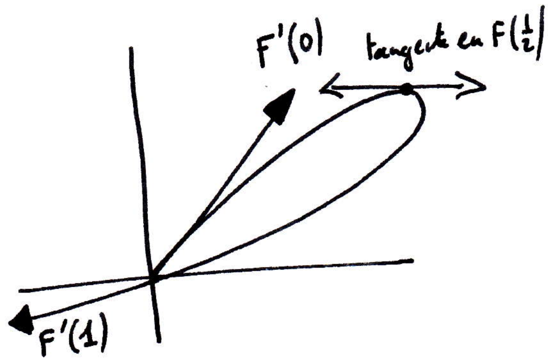


Pour pouvoir appliquer le théorème de Fubini de façon simple on peut couper le triangle en deux triangle l'un pour lequel $0 \leq x \leq 1$ et l'autre pour lequel $1 \leq x \leq 2$

$$I = \int_0^1 \int_{\frac{1}{2}x}^{2x} x \, dy \, dx + \int_1^2 \int_{\frac{1}{2}x}^{3-x} x \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 \, dx + \int_1^2 3x - \frac{3}{2}x^2 \, dx = \left[\frac{1}{2}x^3\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{2} + 6 - 4 - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Exercice 4 :



(4.1) $F(0) = (0,0)$ et $F(1) = (0,0)$

$F'(0) = (1,1)$ qui correspond au brin du haut, on en deduit un parcourt dans le sens horaire.

(4.2) $F'(t) = (1-4t^3 ; 1-2t)$ $\qquad F'(\frac{1}{2}) = (1 - \frac{4}{8} ; 1 - \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2} ; 0)$

Donc la tangente est horizontale car $F'(\frac{1}{2})$ est un vecteur directeur de la tangente. Equation $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Exercice 4 :

(4.3) en un point d'abscisse maximale on doit avoir
$\frac{\partial}{\partial t}(t-t^4)=0$ donc $1-4t^3=0$ donc $t=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. $F(4^{-\frac{1}{3}})=\left(4^{-\frac{1}{3}}(1-4)\,;\,4^{-\frac{1}{3}}-16^{-\frac{1}{3}}\right)$

(4.4) $\displaystyle\int_{\partial^+} x\,dy = -\int_0^1 (t-t^4)(1-2t)\,dt = -\int_0^1 2t^5-t^4-2t^2+t\,dt = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = \frac{-10-6+15}{30} = \frac{+1}{30}$.

(4.5) Si ∂K^+ est le bord de K parcouru dans le sens trigonométrique et $(P;Q)$ un champ vectoriel défini sur un domaine sans trou alors $\displaystyle\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial K^+} P\,dx+Q\,dy$.

$\displaystyle\text{Aire}(K) = \iint_K 1\,dx\,dy \overset{G.R.}{=\!=\!=} \int_{\partial K^+} x\,dy$ ici on a donc aire $(K)=\frac{1}{30}$.

Exercice 5 :

(E_1) : est une équation différentielle linéaire à coef constant d'ordre 1.

(E_1') $y'-2y=0$ a pour solution $y(t)=Ke^{2t}$

on cherche une sol de la forme $at+b$. $a-2(at+b)=2t \iff \begin{cases}-2a=2\\ a-2b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=-1\\ b=-\frac{1}{2}\end{cases}$

$y(t)=-t-\frac{1}{2}+Ke^{2t}$

(E_2) : est une équation différentielle linéaire à coef non constant d'ordre 1.

(E_2') $y'+\frac{2}{t^2-1}y=0 \iff \frac{y'}{y}=-\frac{2}{t^2-1}=\frac{-2}{(t-1)(t+1)}=\frac{-1}{t-1}+\frac{1}{t+1}$

$\iff \ln|y(t)| = \ln(t+1)-\ln(t-1)+C = \ln K\left(\frac{t+1}{t-1}\right) \iff y(t)=K\cdot\frac{t+1}{t-1}$. Notons $y_0(t)=\frac{t+1}{t-1}$

Utilisons la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière de (E_2).

$y(t)=K(t)\,y_0(t)$ est sol de $(E_2) \iff K'y_0+\underbrace{Ky_0'+\frac{2}{t^2-1}Ky_0}_{=0}=t+1 \iff K'(t)\frac{t+1}{t-1}=t+1$

$\iff K'(t)=t-1 \iff K(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2+C$

Les solutions de (E_2) sont les fonctions $y(t)=\frac{1}{2}(t^2-1)+C\frac{t+1}{t-1}$.

(E_3) est une équation différentielle linéaire à coef constant d'ordre 2.

(E_3') : $y''+2y'+5y=0$ Polynôme caractéristique X^2+2X+5 $\Delta=4-20=-16=(4i)^2$

Les racines du polynôme caractéristique sont $r=\frac{-2\pm4i}{2}=-1\pm2i$

Les solutions de (E_3') sont $e^{-t}(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t)$, K_1,K_2 des constantes.

On cherche une solution de (E_3) de la forme $z(t)=(at+b)e^{2t}$

$z'(t)=(2at+a+2b)e^{2t}$ $z''(t)=(4at+2a+4b+2a)e^{2t}$ $\begin{cases}13a=13\\ 6a+13b=0\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\ b=\frac{-6}{13}\end{cases}$

z sol. de $(E_3) \iff 4at+4a+4b+2(2at+a+2b)+5(at+b)=13t \iff$

Les solutions de (E_3) sont donc $y(t)=\left(t-\frac{6}{13}\right)e^{2t}+e^{-t}(K_1\cos 2t+K_2\sin 2t)$

(E_4) on pose $\begin{cases}u=x+ay\\ v=y\end{cases}$ d'où $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial u}$

$\varphi(x,y)=\psi(u,v)=\psi(x+ay,y)$ $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=a\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}$

φ sol. de (E_4) $(3+a)\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{\partial\psi}{\partial v}=2\psi+2v$ posons alors $a=-3$ $\frac{\partial\psi}{\partial v}=2\psi+2v$

on intègre en v avec u fixé : c'est en fait exactement (E_1).

$\psi(u,v)=-v-\frac{1}{2}+K(u)e^{2v}$ d'où $\varphi(x,y)=-y-\frac{1}{2}+K(x-3y)e^{2y}$ avec $K:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$