

Examen de Mathématiques : contrôle 3

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.

Barème indicatif : 6+4+7+3

Exercice 1 :

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 17x^2 + 34x - 30$

1. Montrer que $z_0 = 1 + i$ est racine de P .
2. Montrer que \bar{z}_0 est racine de P .
3. Développer $Q(x) = (x - z_0)(x - \bar{z}_0)$, effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$.
4. Factoriser $P(x)$ dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} .

Exercice 2 :

Décomposer la fraction rationnelle F suivante en éléments simples.

$$F = \frac{8}{x^3(x-2)}$$

Exercice 3 :

Soit $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

1. Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R} .
2. Étudier les variations de f .
3. Étudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Étudier les branches infinies de f .
5. Étudier la convexité de f .
6. Donner l'allure du graphe de f .

Exercice 4 :

Soit $f(x) = e^x \sqrt{1 + 2x}$, déterminer un DL_3 de f en 0.