

Examen de Mathématiques : contrôle 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.

Barème indicatif : 4+3+7+6

Exercice 1 : Intégration.

Soit f la fraction rationnelle définie par $f(t) = \frac{5t - 1}{t^2 + t - 12}$

1. Décomposer f en éléments simples.
2. Déterminer les primitives de f .

Exercice 2 : Intégration.

Calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 t \ln(1 + t^2) dt$$

Exercice 3 : Matrice inverse

Soient p un réel, M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & p \\ 3 & 1 & p \\ 1 & p & 4 \end{pmatrix}$ et (S) le système suivant $\begin{cases} 2x + y + pz = 1 \\ 3x + y + pz = 2 \\ x + py + 4z = 3 \end{cases}$

On pourra utiliser le fait que $\det(M) = p^2 - 4$.

1. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles la matrice M est inversible.
2. Dans le cas où la matrice M est inversible, résoudre le système (S) .
3. Résoudre le système (S) , lorsque $p = 2$.

Exercice 4 : Diagonalisation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 2 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M .
2. Déterminer les valeurs propres de M , on vérifiera que leur somme est égale à -1.
3. Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres.
4. Déterminer D diagonale et P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.