L3SPI
Janvier 2017
Durée 2 heures

Examen de Mathématiques : contrôle 2

L'utilisation ou la consultation de téléphone est formellement interdite, les calculatrices et les téléphones doivent être rangés et éteints. Les documents sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée.
Barème indicatif : 6+5+9

Exercice 1 : Intégration.

Soit F la fraction rationnelle définie par $F(x) = \dfrac{X^2+3}{(X+1)^3}$

1. Décomposer F en éléments simples.
2. Calculer
$$I = \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x$$
3. A l'aide du changement de variable $x = e^t$ calculer l'intégrale :
$$J = \int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^{2t}+3e^t+2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 2 : Matrice inverse

Soient m un réel, M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et (S) le système suivant $\begin{cases} x+2y+z = 10 \\ x-2y+2z = 5 \\ 2x+3y+z = 10 \end{cases}$

1. Calculer le déterminant de M.
2. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la matrice M est inversible.
3. Pour $m = 2$, calculer M^{-1}.
4. Résoudre le système (S).

Exercice 3 : Diagonalisation

Soit M la matrice définie par $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer sans effectuer de calcul que la matrice M est diagonalisable.
2. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
3. Déterminer les valeurs propres de M, on vérifiera que leur somme est égale à 0.
4. Déterminer un vecteur propre associé à chacune des valeurs propres, et vérifier que ces vecteurs propres sont orthogonaux deux à deux.
5. Déterminer D diagonale et P inversible telle que $M = PDP^{-1}$.
6. Soit M' la matrice définie par
$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer D' diagonale et P' inversible telle que $M' = P'D'P'^{-1}$.