L3 SPI
Durée de l'épreuve : 2 heures
Barème indicatif : 5+4+6+5

UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

Examen de Mathématiques, Décembre 2015

Calculatrice et document sont interdits. Seule une feuille A5 manuscrite au choix de l'étudiant est autorisée. Avoir sur soi un téléphone portable allumé, position silencieuse comprise, est interdit.

Exercice 1 : Fonction et intégrales

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-4;2[$ par la formule :

$$f(x) = \frac{x}{(x+4)(x-2)}$$

1. Calculer la dérivée de f, en déduire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-4;2[$.
2. Étudier le signe de f. Représenter rapidement la courbe représentative de f.
3. Calculer $I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$
4. Calculer l'aire (positive) de la surface S comprise entre l'axe des x et la courbe représentative de f pour des abscisses comprises entre -1 et 1.

Exercice 2 : Intégration

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$ en déduire la valeur de l'intégrale $J = \displaystyle\int_1^4 \frac{t+1}{t(\sqrt{t}+1)^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 : Diagonalisation

Diagonaliser les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 7 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : Application linéaire

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y,z) = (3x - y - 4z; 3x - 2y - 5z; x - z)$$

1. Déterminer le noyau de f.
2. Déterminer M la matrice de f dans la base canonique.
3. Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Calculer P^{-1}.
4. On note $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ la base telle que P est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Quel est le vecteur $\overrightarrow{u}$.
5. Déterminer N la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
6. M est-elle inversible ?
7. Montrer que N n'est pas diagonalisable, en déduire que M n'est pas diagonalisable.